E’ possibile costruire una mentalità matematica ?

Prof. F. A. Costabile

1. Introduzione

La matematica è più di una tecnica. Apprendere la matematica significa conquistare l’attitudine ad un comportamento della mente.

(Freudenthal, 1969)

La domanda posta, di sicuro interesse, non è di facile risposta. Infatti essa presuppone l a conoscenza, se pure non in termini rigidi, del significato di “mentalità matematica”. Se per “mentalità matematica” intendiamo un atteggiamento / predisposizione/ abitudine a:

- ✓ osservare, riflettere anche su oggetti e processi astratti;
- ✓ intuire e formulare da casi particolari, congetture di carattere sempre più generale, in un percorso a spirale;
- ✓ dedurre e dimostrare/confutare con le regole della logica classica;
- ✓ porsi e risolvere problemi non solo della realtà sensibile;
- ✓ chiarezza di idee e rigore espositivo sul piano linguistico;
- ✓ pensare, infine, in modo condizionale: se ……..allora.

la risposta può ritenersi positiva, pur rigidamente ad un preciso processo.

Naturalmente la parola “costruire”, presuppone un attore esterno che guidi, predisponga , diriga il percorso; tale attore nel contesto di riferimento scolastico non può che essere l’insegnante.

Nel seguito indicheremo come si possono perseguire uno o più degli obiettivi prima posti, attraverso l’esame di un esempio semplice e non particolarmente indicato, tuttavia basilare per la costruzione della Matematica.

2. Un esempio: i numeri naturali

2.1 Le operazioni

Sul concetto di numero naturale è stato scritto e sarà scritto molto; è fuor di dubbio, però, che esso sia scaturito da esigenze primarie del vivere quotidiano, tanto che oggi si potrebbe dire che è insito nella mente umana, ovvero, nasce e si sviluppa con essa.

Altrettanto si può dire delle quattro operazioni elementari: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Infatti l'esigenza di raggruppare, dividere, ordinare etc. è insita nelle più elementari azioni quotidiane.

L'attività "matematica", però, prosegue. Infatti una volta soddisfatta l'esigenza "concreta", ad esempio, di unire gli oggetti di due gruppi distinti e di avere determinato il numero totale, il "matematico" comincia la riflessione su ciò che si è fatto.

Si scopre che partendo da due gruppi di oggetti distinti se ne è costruito uno solo; ma ognuno dei due gruppi era caratterizzato dal numero di oggetti di cui era formato, quindi posso dire che ciò che si è fatto (unire i due gruppi di oggetti e contare) corrisponde ad associare ad una coppia di numeri naturali univocamente (in uno ed un solo modo) un altro numero naturale. Siccome, poi, questo processo è generale (cioè si può ripetere in una moltitudine di situazioni diverse) lo si denota con un nome particolare: operazione di addizione che acquista, così, carattere di universalità.

E' chiaro, allora, che il passo successivo è quello di sintetizzare la parola di "operazione di addizione" con un simbolo inventato dalla fantasia: "+". Siccome l'operazione di addizione è universale, anche il simbolo che la denota lo diventa. Inizia, così, quel processo che porterà a dire la "matematica è scienza universale, dotata di un proprio linguaggio ….".

Il "lavoro matematico", ovviamente, prosegue attraverso l'osservazione, la riflessione, se pure anche a partire da casi particolari e su oggetti anche astratti, quali sono i numeri.

Ad esempio si osserva che

$$2 + 3 = 3 + 2, \quad 4 + 3 = 3 + 4$$

E ciò si verifica indipendentemente per ogni coppia di numeri.

Allora siamo in presenza di un “fatto” generale e lo si può segnalare con una frase che diventerà universale:

Se a e b sono due numeri naturali e “+” indica l’operazione di addizione (prima definita) allora risulta

$$a + b = b + a$$

Pertanto si può dire di aver formulato una frase di validità universale e la si può sintetizzare con un’espressione linguistica che diventerà, pure, universale: “proprietà commutativa dell’addizione”.

Proseguendo con l’osservazione si riuniscono in un solo gruppo tre gruppi di oggetti e li si mette insieme per scoprirne il numero totale di oggetti.

Ci si accorge, allora, che ci sono diverse possibilità:

- ✓ mettere insieme i primi due, contare gli oggetti del gruppo così costituito, aggiungere, quindi, il terzo gruppo e ricontare;
- ✓ ripetere il procedimento precedente ma a partire dagli ultimi due; in entrambi i casi il risultato finale è lo stesso.

Ad esempio se il primo gruppo è rappresentato dal numero 3 , il secondo da 5 ed il terzo da 2, allora il primo procedimento mi dà

$3 + 5 = 8$ $8 + 2 = 10$ risultato finale 10.

Il secondo mi dà

$5 + 2 = 7$ $7 + 3 = 10$ risultato finale 10.

Ci accorgiamo allora di aver “scoperto” un’altra proprietà di carattere universale che denoteremo con l’espressione linguistica: proprietà associativa dell’addizione ed enunceremo nella forma:

Se a,b,c, sono tre numeri naturali e “+” indica l’operazione di addizione allora

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

ove il segno di parentesi sta ad indicare “priorità” dell’operazione.

Osservando, ancora, l’addizione nei numeri naturali ci si accorge di un’altra proprietà universale.

Infatti esiste un solo numero naturale che lascia invariata l’operazione (di addizione), ovvero non produce effetti, tale numero è lo zero:

$$2 + 0 = 2 \qquad 0 + 5 = 5$$

La proposizione che possiamo enunciare è allora la seguente:

Se a è un numero naturale e “+” è l’operazione di addizione, risulta

$$a + 0 = 0 + a = a$$

per tale ragione il numero 0, prende il nome di elemento neutro dell'addizione.

Notiamo che tutte e tre le proposizioni universali che abbiamo formulato hanno la stessa struttura:

se ……. allora……

E' questa la sintesi della "verità matematica", in tal senso si può dire che ciò che è matematicamente vero è assolutamente certo.

Il lavoro matematico prosegue in diversi modi ponendosi domande del tipo:

- ✓ l'addizione l'ho potuta fare perché sapevo contare gli oggetti, e l'insieme dei numeri naturali è infinitamente grande, ovvero non ha termine; esistono altre possibilità per "fare simili ragionamenti"? Qual è l'ossatura, il canovaggio dell'addizione?
- ✓ nella vita quotidiana serve, sempre più spesso, addizionare numeri e sempre più grandi, ad esempio se un gioielliere un giorno incassa 15799 € e il giorno successivo 29873 €, dopo due giorni quanto ha incassato complessivamente? E se conserva gli incassi giornalieri, quanto sarà l'incasso di un mese?

Per rispondere a questo tipo di domande, spesso occorre creatività, fantasia, logica ovvero il "genio" matematico, che può svilupparsi solo su un humus adeguato, ovvero in un certo tipo di mentalità.

Allora si scopre, che si possono costruire altre leggi che hanno la stessa ossatura dell'addizione, ma che sono definite su altri insiemi, anche con un numero finito di elementi.

Ad esempio associamo un numero ad ogni giorno della settimana

Domenica	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato
1	2	3	4	5	6	7

e con 2 + 3 intendiamo il numero che corrisponde al giorno che si ottiene contando tre giorni a partire da lunedì, giorno corrispondente al numero 2. Così troviamo

$$2 + 3 = 5$$

perché tre giorni dopo il lunedì cade il giovedì, cui è associato il numero 5. Allo stesso modo si trova che

$$6 + 5 = 4$$

Osservando bene il procedimento si scopre che questa "nuova" addizione corrisponde a quella conosciuta, purché si ha l'accortezza di togliere 7 al risultato quando questo ne è più grande. Si trova ancora che questa “nuova” addizione è pure commutativa ed il numero 7 ha la stessa funzione del numero zero nell’addizione ordinaria.

Altri esempi similari impongono alla “mentalità matematica” di astrarre la proposizione più generale possibile che diventerà universale nel linguaggio matematico: una legge che ad ogni coppia ordinata di elementi dello stesso insieme, associa uno ed un solo elemento dello stesso insieme si chiama operazione interna o “ Legge di composizione interna”; una coppia formata da un insieme e da una legge di composizione interna si chiama, poi, struttura algebrica.

Ci si riconduce, così, a “lavorare” (studiare) su un insieme di cui non interesse la natura degli oggetti, bensì, solo le relazioni che si possono stabilire tra di essi. Comincia così la via che porta a dire: “Matematica scienza di strutture ….”

Riguardo l’altra problematica lo scenario è diverso, ci serve un meccanismo, un algoritmo che ci consenta di eseguire addizioni di numeri comunque grandi, col minor sforzo e risparmio di tempo per la mente umana.

Si scopra, così, l’algoritmo dell’addizione, nel sistema decimale, col riporto; quindi la possibilità di eseguire in modo efficiente un qualsiasi numero finito di addizioni. Resta, però il problema della fatica fisica che ciò comporta; e qui il “ genio matematico” da solo non è stato sufficiente. Solo con la collaborazione di diverse mentalità geniali: matematica, meccanica, elettronica, tecnologica etcc… si è potuti giungere ai moderni strumenti automatici di calcolo: calcolatrici e calcolatori, i quali con la solo introduzione dei dati e l’uso di qualche tasto sono in grado di addizionare un numero finito di addendi anche comunque grandi.

Grazie a questi strumenti la mente umana viene sempre più sgravata dalla fatica fisica dei calcoli e, come vediamo, non solo di essi.

Proseguendo nella nostra costruzione, ben presto sorge l’esigenza delle altre operazioni: sottrazione, moltiplicazione e divisione ciascuna delle quali risolve una ben determinata situazione pratica.

Per ovvie ragioni di tempo e spazio non possiamo fare un’analisi dettagliata di ciascuna di esse come abbiamo fatto per l’addizione. Ci limitiamo nel seguito a parlare della divisione e di alcune sue conseguenze.

Essa consente di risolvere il problema di ripartire in parti uguali, ma tale operazione non ha come risultato sempre un sol numero, anzi, possiamo dire che ne ha sempre due, se uno di questi può essere lo zero. In altre parole, dopo varie prove si può giungere alla formulazione della fase universale.

Se a e b sono due numeri naturali con $a \geq b$, $b \neq 0$ allora esistono e sono unici due altri numeri naturali q ed r tali che $a = b\,q + r$ con $0 \leq r < b$; q si chiama quoziente tra a e b, r resto della divisione, inoltre se $r = 0$ a si chiama multiplo di b e b divisore di a.

Scoperta la nuova operazione il lavoro matematico prosegue, secondo almeno due direzioni :

- ✓ determinare algoritmi efficienti per calcolare quoziente e resto della divisione di due numeri naturali, comunque elevati sia manualmente che con strumenti elettronici;
- ✓ osservare l'operazione di divisione per giungere alla formulazione di proposizioni universali basate sulle proprietà intrinseche di essa.

Nel seguito ci soffermiamo sulla seconda direzione.

2.2 Multipli e divisori

Giunti al concetto di multiplo e di divisore, il matematico si pone, ad esempio, il problema, non necessariamente legato ad un'esigenza concreta, di determinare tutti i divisori di un numero assegnato. Certamente per numeri piccoli il problema è di facile soluzione:

6 ha come divisori 1, 2, 3 e 6

10 ha come divisori 1, 2, 5 e 10

ma 1 5 7 9 1 quali divisori ha ?

La via più diretta di soluzione è quella di verificare se il resto della divisione da 2 a 15790 (n-1, se n è il numero dato), è zero oppure no. E' chiaro che per numeri grandi, questo lavoro pur concettualmente possibile, diventa oltremodo faticoso.

Allora nell'era moderna ci viene in soccorso il computer. Già il computer, una delle più sensazionali scoperte del secolo scorso, ha contribuito al progresso scientifico in tutte le scienze, comprese quelle umanistiche e sociali, in genere. Esso può offrire anche un valido supporto alla formazione della mentalità matematica, a condizione che venga utilizzato quale strumento da programmare, se pur in ambienti sempre più facilitati e finalizzati. Infatti la programmazione richiede capacità logiche intuitive, ma anche creative e di rigore linguistico - sintattico. In questo modo il computer diventa risolutore di problemi ma anche propositore e chiarificatore, rendendo visibile "l'invisibile".

In questa ottica il problema del calcolo di tutti i divisori di un qualsiasi numero naturale, diventa facilmente risolvibile senza fatica per la mente umana. Infatti si possono costruire programmi come DIV 1 e DIV 2.

```
Listato programma DIV 1
Stampa("calcolo dei divisori di un numero intero
1");
n=legginum("numero di cui si vogliono i
divisori");
Per (i da 1 a n)Esegui;
  r=n rdiv i;
  se (r=0)allora
    stampa( i,"è divisore");
fine;
```

```
Listato programma DIV 2
stampa("calcolo dei divisori di un numero intero
2");
n=legginum("numero di cui si vogliono i
divisori");
Per ( i da 2 a int(n/2))esegui;
  r= n rdiv i;
  se (r=0)Allora
    stampa(i,"  è divisore ");
fine;
```

Il concetto di divisibilità e di divisore è foriero di ulteriori possibilità formative. Ad esempio dopo aver osservato che:

3 è divisore di 9

3 è divisore di 12

ma 3 è anche divisore di 9+12 = 21

si può chiedere di formulare una congettura generale che racchiuda il caso particolare e cercarne di stabilire la verità o la falsità. Nel caso specifico si può dire:

Se a, b, c sono numeri naturali diversi da zero e c è divisore di a e b, allora c è divisore anche di a + b

Per stabilire la validità di questa proposizione non è sufficiente verificarla in un numero finito, anche se grande, di casi particolari.

Occorre ragionare in astratto formulando enunciati validi in base a ciò che si è già stabilito. Nel caso in questione, semplicemente si ha:

- ✓ c divisore di $a \Rightarrow$ esiste $q \in$ N
  $q \neq 0$ tale che a = $q \cdot$ c
- ✓ c divisore di b $\Rightarrow q_1 \in$ N $q_1 \neq 0$ tale che $b = q_1 c$

allora sommando le due uguaglianze si ha a + b = q·c +q_1·c =(applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione)= (q +q_1) c essendo q +q_1 ancora un numero naturale segue che c è divisore di a + b.

Dopo questa dimostrazione la proposizione dianzi enunciata acquista carattere universale.

Chiaramente si possono formulare numerose altre proposizioni che utilizzano il concetto di divisibilità, il cui contributo all'acquisizione di una certa mentalità, di un certo metodo, in particolare:

- ✓ Esame di casi particolari
- ✓ Individuazione di una proprietà
- ✓ Formulazione generale della congettura (forma condizionale)
- ✓ Dimostrazione/ confutazione
- ✓ Universalità della proposizione.

È evidente.

2.3 Numeri primi

La riflessione sul concetto di divisibilità e di divisione porta ad ulteriori circostanze "astratte" ovvero non immediatamente riconducibili ad esigenze del quotidiano, quindi ad "attività matematica pura", ovvero a relazioni tra oggetti. Infatti il calcolo dei divisori di un numero mette in evidenza la circostanza: esistono numeri i cui unici divisori sono 1 e il numero stesso, ovvero non esistono divisori diversi da 1 e dal numero stesso.

I numeri 2,3,5,7,11,13,17….. rientrano in questa categoria.

Questa diversità tra i numeri naturali, per il matematico è importante: occorre distinguerla attribuendo un nome specifico, che diventerà poi universale, tale tipo di proposizione si chiamerà, nel linguaggio matematico: definizione.

I numeri naturali che ammettono come unici divisori l'unità ed il numero stesso si chiamano numeri primi. Ovviamente lo "spirito matematico" non si ferma alla, se pur interessante, scoperta dei numeri primi, ma continua l'indagine, ponendo domande del tipo:

- ✓ come si può stabilire se un numero dato, comunque grande, sia primo?
- ✓ quanti "sono" i numeri primi?
- ✓ quali sono i numeri primi minori di un numero assegnato?
- ✓ sono utili i numeri primi nello studio dei naturali?
- ✓ sono utili i numeri primi nelle applicazioni al quotidiano?

e così via.

Naturalmente possiamo, ora, abbozzare qualche risposta alle precedenti domande, anche perché, come vedremo, per alcune di esse non esiste ancora risposta definitiva.

Cominciamo con rispondere alla prima domanda.

Chiaramente il procedimento più immediato è quello di calcolare tutti i divisori del numero dato e constatare "de visu" se esso è primo o no.

Naturalmente il problema diventa sempre più complicato man mano che il numero assegnato cresce.

Ci si potrebbe servire del calcolatore, e del programma precedente che calcola i divisori, ma ci accorgiamo che è "troppo ingombrante" e ridontante, perché ci dà informazioni che non ci servono (ad esempio tutti i divisori), mentre per il nostro problema basta fermarsi al primo divisore diverso da 1.

Allora possiamo formulare altri programmi come ad esempio: Primo 1, 2, 3; con i quali per numeri ragionevolmente grandi il nostro problema è risolto, attraverso l'uso di semplici PC.

```
Listato programma Primo 1
Stampa("verifica se un numero è primo 1 " );
n=legginum("numero di cui si vuole sapere se è
primo");
Per (i da 2 a n-1)esegui;
  r=n rdiv i;
  se (r=0)allora esegui;
```

```
    stampa(n," non è primo",i,"è divisore");
    stop;
  fine;
fine;
stampa(n," è primo");

Listato programma 2
stampa("fattorizzazione prima");
N=legginum("numero di cui si vuole la
fattorizzazione");
m=n-1;
Per (i da 2 a m)Esegui;
  r=n rdiv i;
  esegui finquando(r=0);
    se (Primo(i)=vero)allora esegui;
      stampa(i);
      n=n Div i;
      r=n rdiv i;
    fine;
  fine;
fine;

Listato programma 3
stampa("verifica se un numero è primo");
n=legginum;
s=primo(n);
stampa(s);
```

La seconda domanda, naturale per un matematico, è di natura diversa, infatti il computer non ci può essere di aiuto, in quanto essa opera sull'infinito, mentre il computer opera ed opererà sempre e comunque sul finito, anche se arbitrariamente grande.

Occorre, qui, il "genio matematico", che nella fattispecie si concretizzò con Euclide.

Egli, infatti, risolse il problema con un ragionamento per "assurdo", ovvero suppose che i numeri primi fossero in numero finito, e concluse con una contraddizione alle "verità matematiche" precedentemente stabilite; dunque l'insieme dei numeri primi non può essere finito. Formulò, così, la frase (Teorema, nel linguaggio matematico) che acquistò carattere universale: l’insieme dei numeri primi è infinito.

Anche un famoso matematico greco, Eratostene, inventò un procedimento per determinare tutti i numeri primi minori di un assegnato numero naturale, rispondendo così al nostro terzo quesito. Tale procedimento noto col nome di “crivello di Eratostene” consiste nel:

- ✓ partire dal più piccolo numero primo minore del numero dato ed eliminare tutti i suoi multipli, escluso naturalmente il numero stesso, minori del numero dato;
- ✓ ripetere l’operazione, partendo dal più piccolo numero primo maggiore di quello in precedenza usato, finchè necessita;
- ✓ i numeri non cancellati sono quelli primi.

Chiaramente questo procedimento è ragionevole e fattibile manualmente, per numeri non troppo grandi, ma esso è programmabile e, quindi, il computer può risolverci il problema anche per numeri grandi.

In proposito c’è il programma CRIVER1 e CRIVER2.

```
Listato programma CRIVER1
n=legginum;
v=vettore(n);
Per (i da 1 a n) esegui;
  v(i)=i;
fine;
Per (p da 2 a n)Esegui;
  se (v(p)<>0)allora esegui;
     Per (k da p a int(n/p))esegui;
       i=p*k;
       v(i)=0;
     fine;
  fine;
  altrimenti Esegui;
    p=p+1;
    Per (h da p a int(n/h));
      i=p*h;
      v(i)=0;
    fine;
  fine;
```

```
fine;
v(1)=0;
stampavett(v);

Listato programma CRIVER2
Stampa ("crivello di Eratostene2");
n=legginum;
v=vettore(n);
Per (i da 1 a n) esegui;
  v(i)=i;
fine;
Per (p da 2 a n)Esegui;
  se (v(p)<>0)allora esegui;
    Per (k da p^2 a int(n/p))esegui;
      i=p*k;
      v(i)=0;
    fine;
  fine;
  altrimenti Esegui;
    p=p+1;
    Per (h da p a int(n/h));
      i=p*h;
      v(i)=0;
    fine;
  fine;
fine;
v(1)=0;
stampavett(v);
```

Ai matematici greci è dovuto un altro risultato sui numeri primi, sempre frutto della sola manipolazione tra i numeri (oggetti) e proprietà (relazioni) tra di essi, che è sostanzialmente la risposta al quarto quesito. Infatti si è stabilito: ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 si fattorizza, in modo unico, a meno dell'ordine dei fattori, come prodotto di primi non necessariamente distinti. Questa fattorizzazione può essere calcolata con il computer, ad esempio, attraverso il programma __2__.Questo risultato, come è noto, costituisce la base per ulteriore attività matematica, infatti basta pensare ai concetti di Massimo

Comune Divisore e Minimo Comune Multiplo su cui non ci soffermiamo.

Un'altra domanda che il matematico si pone (si pose!) riguarda la possibilità di determinare formule che generassero numeri primi.

Ad esempio la formula $n^2 - n + 41$ genera numeri primi per n da 2 a 40, ma non per 41.

In questo ordine di idee P. de Fermat (1601 – 1665) formulò la congettura che ogni numero della forma

$$2^{2^n} + 1$$

fosse primo, avendolo verificato per n = 1,2,3,4. Disgraziatamente, però, circa 100 anni dopo Eulero (1707 – 1783) mostrò che per n =5 4.294.967.297 il numero non è primo.

Non si conoscono né i ragionamenti di Fermat, né quelli di Eulero per le loro asserzioni in merito, ma oggi il semplice programma divisore 3, ci consente di confermare che per n = 1,2,3,4 l'ipotesi di Fermat si verifica, mentre per n = 5 si trova come primo divisore 641.

Non esiste a tutt'oggi nessuna formula che genera solo numeri primi, anche quella dovuta a Mersenne (XVII secolo)

$$2^n - 1$$

genera numeri primi solo se n è primo.

Con questa formula M. Nowak il 18/02/2005 ha scoperto il più grande numero primo conosciuto, esso è composto da sette milioni di cifre e si ottiene da

$$2^{25964951} - 1$$

Esistono, tuttavia, numerosi altri quesiti sui numeri primi che i matematici si sono posti, ma ancora senza risposta. Ad esempio non si conosce la risposta alla congettura di Goldbach (1690 – 1764): ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi.

Bibliografia

1- F.Costabile Matematica: cosa , perché ,come ,nella secondaria del terzo millennio. Didattica e Didattiche disciplinari N^ 1 (2005) Pellegrini editore (Cosenza)