Calcolo Letterale

1. Monomi

E' corretto dire:

"un monomio è un'espressione letterale composta da un coefficiente e da una parte letterale; il coefficiente di solito è un numero, ma può anche essere una lettera, se è così specificato dal contesto; la parte letterale è composta da una o più variabili con eventuali esponenti; l'esponente (se figura una sola variabile) o la somma degli esponenti (se figurano più variabili) dicesi grado del polinomio" ?

E' corretto il seguente algoritmo per effettuare la somma di più monomi?

1. Assegna i monomi;
2. Osserva la parte letterale di ogni singolo monomio;
3. Se è la stessa prosegui, altrimenti vai al punto 6;
4. Effettua la somma dei coefficienti dei singoli monomi e chiama il risultato S;
5. Scrivi il monomio che ha S per coefficiente e per parte letterale quella di uno dei monomi dati, vai al punto 7;
6. I monomi non sono simili e perciò non si possono sommare;
7. Stop.

Esercizio 1

Calcola la somma dei seguenti monomi:

$$\frac{1}{4}xy^2, \quad -xy^2, \quad 2xy^2$$

Soluzione

$$\frac{1}{4}xy^2 + \left(-xy^2\right) + 2xy^2 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 2\right)xy^2 = \frac{5}{4}xy^2$$

E’ corretto il seguente algoritmo per calcolare il prodotto di due o più monomi ?

1. Assegna i monomi;
2. Calcola il prodotto dei coefficienti e chiamalo C;
3. Calcola il prodotto delle parti letterali applicando le regole del prodotto e delle potenze dei numeri reali, e chiama il risultato t;
4. Scrivi il monomio che ha come coefficiente C e parte letterale t;
5. Stop.

Esercizio 2

Calcola la il prodotto dei seguenti monomi:

$$\frac{1}{4}x^2zy^2\,,\quad \frac{1}{3}x^2zyt$$

Soluzione

$$\frac{1}{4}x^2zy^2\cdot\frac{1}{3}x^2zyt=\frac{1}{12}x^2zy^2\cdot x^2zyt=\frac{1}{12}x^4z^2y^3t$$

E’ corretto il seguente algoritmo per calcolare il quoziente di due monomi ?

1. Assegna i monomi distinguendo tra dividendo e divisore;
2. Calcola il monomio reciproco del monomio divisore;
3. Moltiplica il monomio dividendo per il monomio fratto del punto precedente.

Esercizio 3

Calcola la il quoziente dei seguenti monomi:

1. $\frac{1}{5}x^2y^2\,,\quad 4xy$
2. $0{,}5x^3y^2\,,\quad 0{,}3xyz$

Soluzione

1. $\frac{1}{5}x^2y^2 \cdot \frac{1}{4xy} = \frac{1}{20} \cdot \frac{x^2y^2}{xy} = \frac{1}{20} \cdot xy$
2. $0,8x^3y^2 \cdot \frac{1}{0,3xyz} = \frac{8}{3}\frac{x^3y^2}{xyz} = 2,\bar{6}\frac{x^2y}{z}$

Osserviamo che nel primo esempio il risultato della divisione è un monomio, mentre nel secondo è un’espressione razionale fratta, contenente cioè variabili al denominatore.

Quando il risultato della divisione è un monomio diciamo che il primo monomio è divisibile per il secondo (o equivalentemente che il secondo è divisore del primo).

In analogia al calcolo numerico, si possono definire il massimo comune divisore (M.C.D.) e il minimo comune multiplo (m.c.m.) di due o più monomi.

Con massimo comun divisore (M.C.D.) intendiamo ogni monomio che, oltre ad essere divisore di tutti i monomi dati, ha massimo grado. Analogamente, per minimo comune multiplo intendiamo ogni monomio che, oltre ad essere divisibile per ciascuno dei monomi dati, ha minimo grado.

Quanto al coefficiente del M.C.D. (o m.c.m.) questo può essere un numero reale qualsiasi. Tuttavia, per semplicità di calcolo, si preferisce assumere come coefficiente il M.C.D. (o m.c.m.) dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi dati, se questi sono interi, altrimenti si assume +1.

Una regola pratica per determinare il M.C.D. e il m.c.m., può essere la seguente:

Per ottenere il M.C.D. di due o più monomi è sufficiente considerare il monomio che ha come coefficiente il M.C.D. dei coefficienti se questi sono interi, altrimenti +1; e come parte letterale quella formata dalle sole lettere comuni, prese una sola volta con l’esponente minore.

Per ottenere il m.c.m. di due o più monomi è sufficiente considerare il monomio che ha come coefficiente il m.c.m. dei coefficienti e come parte letterale quella formata dalle lettere comuni e non comuni con l’esponente maggiore.

Esercizio 4

Determinare M.C.D. e m.c.m. dei seguenti monomi:

$$2x^2yz\,,\quad 4xy^2z\,,\quad 6x^2yz^2$$

Soluzione

MCD($2x^2yz$, $4xy^2z$, $6x^2yz^2$) = $2xyz$

mcm($2x^2yz$, $4xy^2z$, $6x^2yz^2$) = $12x^2y^2z^2$.

1.1. Polinomi

Si chiama grado di un polinomio, il massimo grado dei suoi monomi componenti; talvolta si considera anche il grado rispetto ad una variabile, intendendo con ciò l'esponente più alto di tale variabile.

Esempio 1

- $\frac{1}{4}x^2y^3 - 5x^3 + 7$ è di grado 5; di grado 3 rispetto a x o y ;
- $x^4 - 3x^2 + 5y - 2$ è di grado 4; di grado 1 rispetto a y ;
- $5x^2y^2z^2 - \frac{7}{3}x^2 + 1$ è di grado 6; di grado 2 rispetto a x o y o z;
- 81 è un polinomio di grado 0.

Un polinomio si dice nullo se sono nulli tutti i monomi che lo compongono, cioè se sono nulli tutti i coefficienti. Un polinomio in una sola variabile si dice ordinato se i suoi termini sono scritti in ordine decrescente (crescente) rispetto al grado; si dice completo se, essendo n il suo grado, contiene termini (non nulli) di tutti i gradi da n a 0.

Esempio 2

- $A(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$, è ordinato, completo, di grado 4;

- $B(x) = 7x^5 - 4x^2 + 1$, è ordinato, incompleto, di grado 5;
- $C(x) = x - 1 + x^4 - x^3 + 2x^2$, è completo, non ordinato, di grado 4;
- $D(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, è ordinato, completo, di grado n se e solo se i coefficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sono tutti diversi da zero.

Gli esempi riportati considerano tutti polinomi nella sola variabile *x*. Ovviamente, nel caso in cui il polinomio sia composto da monomi con più variabili ($x, y, z, \ldots$) è possibile ordinarlo rispetto ad una variabile a scelta, a seconda della convenienza, in relazione alle eventuali operazioni da compiere.

Esercizio 5

Calcolare il prodotto $P \cdot Q$ con $P = 12347551$ e $Q = 43274521$, utilizzando una calcolatrice con 8 cifre di display.

Soluzione

Il risultato richiesto contiene 15 o 16 cifre, quindi la calcolatrice non può contenere esattamente questo numero. Conviene, perciò, comporre i numeri in gruppi di 4 cifre:

$P = 1234 \cdot 10^4 + 7551 = a \cdot 10^4 + b$ con $a = 1234$, $b = 7551$

$Q = 4237 \cdot 10^4 + 4251 = c \cdot 10^4 + d$ con $c = 4327$, $d = 4251$.

Allora il prodotto richiesto

$$P \cdot Q = \left(a \cdot 10^4 + b\right)\left(c \cdot 10^4 + d\right)$$

che può essere riguardato come un semplice prodotto di polinomi:

$$P \cdot Q = ac10^8 + \left(ad + bc\right) \cdot 10^4 + bd$$

poichè a,b,c,d, contengono ciascuno solo 4 cifre, possiamo eseguire i prodotti richiesti con la calcolatrice e risulta:

$$ac = 1234 \cdot 4327 = 5339218$$
$$bc = 7551 \cdot 4327 = 32673177$$
$$ad = 1234 \cdot 4521 = 5578914$$
$$bd = 7551 \cdot 4521 = 34138071$$

da cui

$$P \cdot Q = 5339518 \cdot 10^8 + \left(5578914 + 32673177\right) \cdot 10^4 + 34138071 =$$
$$= 534334355048071$$

Generalizzando questo procedimento, si può concludere che, se si dispone di una calcolatrice con 2p cifre di display, per moltiplicare due numeri P e Q formati al massimo da 2p cifre ciascuno, posto $P = a \cdot 10^p + b$ e $Q = c \cdot 10^p + d$ basta applicare la formula:

$$P \cdot Q = \left(a \cdot 10^p + b\right) \cdot \left(c \cdot 10^p + d\right) = ac10^{2p} + \left(ad + bc\right) \cdot 10^p + bd \qquad (1)$$

Se invece di una calcolatrice col display a 8 cifre si dispone di una calcolatrice che contiene fino a 16 cifre di display, l’esercizio precedente è risolvibile direttamente, ma il problema, ovviamente, si porrà non appena i numeri dati (o il prodotto) dovessero contenere più di 16 cifre; in tal caso bisognerà ricorrere al procedimento sopra riportato.

Esercizio 6

Scrivere un programma Matcos che implementi l’algoritmo basato sulla (1).

Soluzione

```
p=legginum(“2p sono le cifre del display”);
a=legginum;
b=legginum;
c=legginum;
d=legginum;
p1=a*c;
p2=a*d + b*c;
stampa(“Il  prodotto  (a*10^p+b)*(c*10^p+d)  è  =  ”,
        p1*10^(2*p)+p2*10^p+b*d);
```

1.2. Principio di identità dei polinomi

Due espressioni algebriche sono identiche se e solo se assumono gli stessi valori per ogni valore numerico attribuibile alle lettere.

Ad esempio le due espressioni

$$(x+y)^2 \quad \text{e} \quad (x^2+2xy+y^2)$$

sono identiche.

Questo concetto vale, naturalmente, anche per i polinomi in una variabile, per questi si può, ulteriormente, dimostrare il seguente principio di identità:

Due polinomi sono identici, cioè assumono lo stesso valore per ogni valore numerico attribuibile alle lettere, se e solo se i coefficienti dei termini di ugual grado sono uguali, o, in altre parole, se e solo se, scritti in forma normale (cioè ridotti i termini simili), a parte l'ordine sono lo stesso polinomio.

Esercizio 7

Si dimostri che le due espressioni:

$$x^2+10x+24 \quad \text{e} \quad (x+6)(x+4)$$

Sono identiche.

Soluzione

Dato che il primo polinomio è scritto in forma normale, per poter applicare il principio di identità dei polinomi, occorre scrivere nella stessa forma anche la seconda espressione. Eseguendo quindi il prodotto:

$$(x+6)(x+4)=x^2+4x+6x+24=x^2+10x+24$$

segue facilmente, applicando il principio di identità dei polinomi, che i due polinomi assegnati sono identici.

Osserviamo che l'identità dimostrata

$$x^2+10x+24=(x+6)(x+4)$$

È molto interessante, perché il secondo membro si presenta in forma fattorizzata. Osserviamo inoltre che il secondo coefficiente, 10, risulta essere 6+4, così come il termine noto, 24, è il prodotto $6 \cdot 4$.

In generale si può dimostrare che:
Dato il trinomio

$$x^2+mx+n$$

Se esistono due numeri a e b tali che

$$a+b=m \qquad \text{e} \qquad a\cdot b=n$$

risulta

$$x^2+mx+n=(x+a)(x+b)$$

2. Divisibilità di un polinomio per un monomio del tipo (*x*-*a*). (cif. 1° livello p.116)

In analogia a quanto avviene con i numeri, possiamo dire che un polinomio $A(x)$ è divisibile per un altro, $B(x)$, quando il resto della divisione, $A(x):B(x)$, è zero, cioè il polinomio con coefficienti tutti nulli.

Se indichiamo con $Q(x)$ il polinomio quoziente e con $R(x)$ il polinomio resto vale l'identità:

$$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x) \qquad (1)$$

Il grado di $B(x)$ è uguale alla differenza tra il grado massimo di $A(x)$ e quello di $B(x)$, mentre il grado di $R(x)$ è sempre inferiore a quello di $B(x)$. Inoltre se $R(x)=0$, cioè è il polinomio nullo, allora diremo che $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Nel caso particolare che $B(x)$ è il binomio di primo grado $(x-a)$ abbiamo come conseguenza che il grado di $Q(x)$ è uguale a quello di $A(x)$ diminuito di 1 e quello di $R(x)$ è zero, cioè $R(x)$ deve essere una costante, alla quale possiamo dare un significato preciso.

Infatti, nella (1), se al posto di $B(x)$ sostituiamo $(x-a)$ diventa

$$A(x)=Q(x)\cdot(x-a)+R \qquad (2)$$

ove R è una costante.

Se al posto di x sostituiamo il valore costante a troviamo:

$$A(a) = Q(a)\cdot(a-a) + R = Q(a)\cdot 0 + R = R \qquad (3)$$

Cioè, il resto, R, della divisione del polinomio $A(x)$ per il trinomio $x-a$ è pari al valore che il polinomio $A(x)$ assume per il valore dell'incognita $x=a$.

Esempio 3

Dividere il polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ per il binomio $B(x) = x - 1$.

Soluzione

$$\begin{array}{llll}
x^3 & +2x^2 & +x & -1 \\
\underline{-x^3} & \underline{+x^2} & & \\
0 & 3x^2 & +x & -1 \\
 & \underline{-3x^2} & \underline{+3x} & \\
 & 0 & +4x & -1 \\
 & & \underline{-4x} & \underline{+4} \\
 & & 0 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
:\underline{\;x-1\;} \\
x^2+3x+4
\end{array}$$

dunque:

$A(x) = Q(x)(x-1) + R$,

che diventa

$x^3 + 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 4) + 3$,

poiché il resto è diverso da zero, il polinomio $A(x)$ non è divisibile per $x-1$. Osserviamo, infine, che il resto 3 è pari al valore del polinomio $A(x)$ per $x=1$, infatti:

$$A(x) = 1^3 + 2\cdot 1^2 + 1 - 1 = 1 + 2 + 0 = 3.$$

In generale, vale, perciò la seguente

Proposizione

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per un binomio del tipo $x-a$ se il polinomio risulta uguale a zero, quando al posto di x si sostituisce il numero a.

Esempio 4

Dire se il polinomio $A(x)=x^2-3x+2$ è divisibile per $x-1$.

Soluzione

Dobbiamo sostituire il valore $x=1$ nel polinomio:

$$A(1)=1^2-3\cdot 1+2=1-3+2=0$$

dunque, essendo il valore del polinomio per $x=1$, 0, il polinomio $A(x)$ è divisibile per $x-1$. Si può effettuare la verifica eseguendo la divisione:

$$\begin{array}{lll}
x^2 & -3x+2 & :\underline{x-1\quad} \\
\underline{-x^2+x} & & \quad x-2 \\
0 & -2x+2 & \\
 & \underline{2x-2} & \\
 & 0\ +0 &
\end{array}$$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

3. Regola di Ruffini

La divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio $x-a$ si può effettuare con un algoritmo più snello del precedente, inoltre questo può dar luogo ad un codice automatico per il calcolatore.

Tale algoritmo prende il nome di Regola di Ruffini, dal nome del matematico e medico italiano Paolo Ruffini (1765-1822). Per capire come si origina questo algoritmo, per semplicità di calcoli, riferiamoci ad un polinomio di secondo grado:

$$A(x) = bx^2 + cx + d \tag{4}$$

Ricordiamo che dividendo tale polinomio per $x - a$ si otterrà un polinomio quoziente di grado 1 (2-1=1) del tipo $px + q$ ed un resto costante, r. Cioè deve valere l'identità

$$bx^2 + cx + d = (x-a)(px+q) + r \tag{5}$$

Eseguiamo, ora, il prodotto al secondo membro e ordiniamo il polinomio risultante:

$$(x-a)(px+q) + r = px^2 + (q - ap)x + r - aq$$

Sostituendo in (5) otteniamo:

$$bx^2 + cx + d = px^2 + (q - ap)x + r - aq \tag{6}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi, cioè uguagliamo i coefficienti delle potenze delle incognite di pari grado:

$$\begin{aligned} b &= p \\ c &= q - ap \\ d &= r - aq \end{aligned}$$

da queste equazioni possiamo ricavare in funzione di *b, c, d, a* che sono quantità note, non solo r che è il resto, ma anche *p* e *q* che sono i coefficienti del polinomio quoziente. Dunque abbiamo

$$\begin{cases} p = b \\ q = c + ap \\ r = d + aq \end{cases} \tag{7}$$

E' tradizione disporre il calcolo nella forma

	b	c	d
a			

Al disotto della linea orizzontale verranno scritti, da sinistra verso destra, i coefficienti del quoziente: così

	b	c	d
		ab	$a(ab+c)$
a	b	$c+ab$	$a(ab+c)+d$

il termine noto $a(ab+c)+d$ è il resto.

Esempio 5

Calcolare quoziente e resto della divisione

$$\left(3x^2-5x+6\right):\left(x-2\right)$$

Soluzione

Si dispone il calcolo così:

	3	*-5*	*6*
2			
	3		

al disotto della linea orizzontale vengono scritti i coefficienti del polinomio quoziente e del resto:

	3	*-5*	*6*
2		*6*	*2*
	3	*1*	*8*

e dunque

$$3x^2-5x+6=\left(3x+1\right)\left(x-2\right)+8$$

La Regola di Ruffini trova un’applicazione notevole nella divisione di un binomio del tipo

$$x^n - a^n \quad \text{o} \quad x^n + a^n$$

per

$$x - a \quad \text{o} \quad x + a$$

Troviamo subito:

$x^2 - a^2$ è divisibile per $x - a$

$x^3 - a^3$ è divisibile per $x - a$

…………………………………

$x^n - a^n$ è divisibile per $x - a$

e

$x^3 + a^3$ è divisibile per $x + a$

$x^5 + a^5$ è divisibile per $x + a$

…………………………………

$x^n - a^n$ è divisibile per $x - a$ solo per n dispari

I coefficienti del polinomio quoziente si trovano facilmente, ad esempio, calcoliamo il quoziente di $(x^5 - a^5):(x - a)$

	1	*0*	*0*	*0*	*0*	a^5
a		a	a^2	a^3	a^4	a^5
	1	a	a^2	a^3	a^4	*0*

e quindi

$$(x^5 - a^5) = (x - a)\left(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4\right).$$

La procedura illustrata per un polinomio di secondo grado, in realtà può essere estesa a polinomi di grado qualunque, come del resto visto nell'ultimo esempio.

Esempio 6

Dividere il polinomio $A(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 1$ per il binomio $x + 1$.

Soluzione

Applichiamo la Regola di Ruffini tenendo conto che $a = 1$ $\left(x - a = x - (-1) = x + 1\right)$.

	1	*-4*	*0*	*-3*	*0*	*1*
-1		*-1*	*5*	*-5*	*8*	*-8*
	1	*-5*	*5*	*-8*	*8*	*-7*

$$x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 1 = (x+1)\left(x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 8x + 8\right) - 7$$

Per poter scrivere un codice di calcolo automatico, valido per ogni polinomio di grado n:

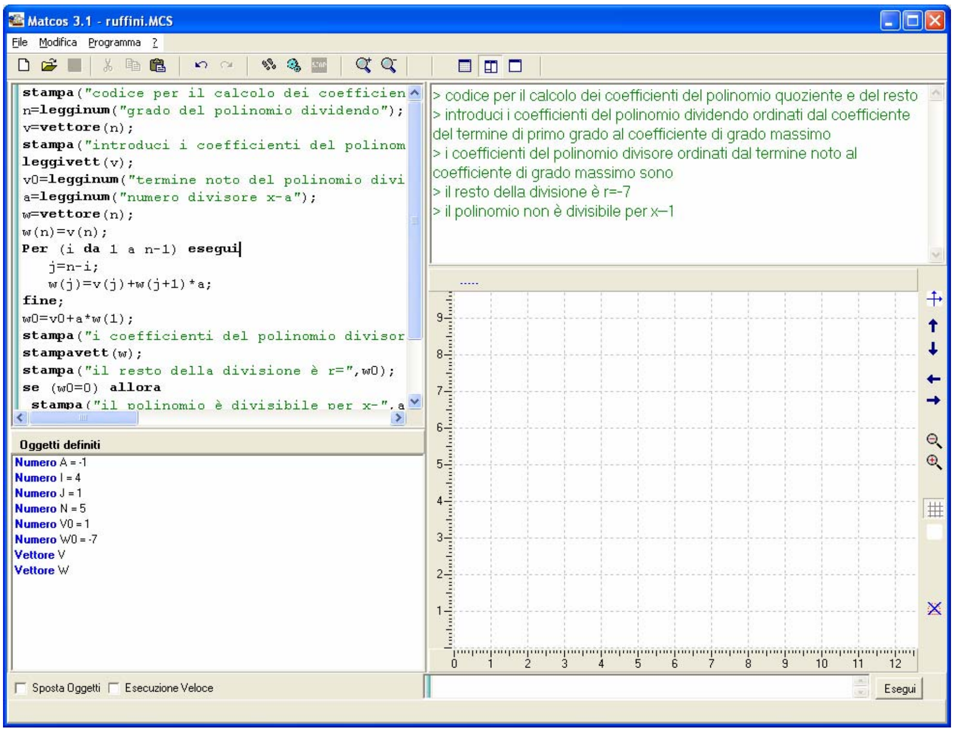
$$A(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

occorre disporre delle formule ricorsive che forniscono, i coefficienti del polinomio quoziente e il resto, analoghe alle (7).

Tali formule saranno ricavate nel terzo livello, ma se si vuole far uso del codice sin da ora come verifica o in presenza di qualche esercizio particolarmente complicato, esso è il seguente.

```
stampa("codice per il calcolo dei coefficienti del
     polinomio quoziente e del resto");
n=legginum("grado del polinomio dividendo");
v=vettore(n);
stampa("introduci i coefficienti del polinomio
     dividendo ordinati dal coefficiente del termine
     di primo grado al coefficiente di grado
     massimo");
leggivett(v);
v0=legginum("termine noto del polinomio dividendo");
a=legginum("numero divisore x-a");
w=vettore(n);
w(n)=v(n);
Per (i da 1 a n-1) esegui
   j=n-i;
   w(j)=v(j)+w(j+1)*a;
fine;
```

```
    w0=v0+a*w(1);
    stampa("i coefficienti del polinomio divisore
         ordinati dal termine noto al coefficiente di
         grado massimo sono");
    stampavett(w);
    stampa("il resto della divisione è r=",w0);
    se (w0=0) allora
     stampa("il polinomio è divisibile per x-",a);
    altrimenti
     stampa("il polinomio non è divisibile per x-",a);
```



Se il binomio divisore è del tipo $px+q$ con $p \neq 0,1$ il precedente procedimento si può applicare se preliminarmente si dividono i coefficienti di $A(x)$ per p e poi si considera il binomio divisore $x-\frac{q}{p}$.

4. Minimo comune multiplo di un insieme di polinomi

Analogamente a quanto si è detto a proposito dei numeri e dei monomi, è possibile parlare di un minimo comune multiplo (m.c.m.) di un insieme non vuoto di polinomi.

Dati due o più polinomi, chiamiamo loro ***minimo comune multiplo*** *il polinomio di grado minimo fra i polinomi divisibili per ognuno dei polinomi dati.*

Per determinare il m.c.m. di un insieme di polinomi conviene:

1. Fattorizzare i polinomi in termini di fattori primi;
2. Considerare il prodotto della potenza più alta di ciascun fattore primo, che appare in ogni polinomio (tale prodotto è in generale il m.c.m.).

Esercizio 8

Trovare il m.c.m. di $(a-1)^2$, $(a+1)^2$, $(a-2)(a+1)$.

Soluzione

I fattori primi sono $(a-1)$, $(a+1)$ e $(a-2)(a+1)$; prendendo le loro potenze più elevate, il m.c.m. è:

$$(a-1)^2(a+1)^2(a-2).$$

Esercizio 9

Trovare il m.c.m. dei cinque polinomi

$x^2-2xy+y^2$; $x^2+2xy+y^2$; x^2-y^2; $x^2-3xy+2y^2$; $2x^2+3xy+y^2$.

Soluzione

Occorre prima fattorizzare i polinomi:

$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$;

$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$;
$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$;
$x^2 - 3xy + 2y^2 = x(x-y) - 2y(x-y) = (x-y)(x-2y)$;
$2x^2 + 3xy + y^2 = 2x(x+y) + y(x+y) = (x+y)(2x+y)$.

I fattori primi che compaiono nei polinomi sono

$$x+y,\ x+y,\ x-2y,\ 2x+y$$

e tenendo conto delle potenze, il m.c.m. cercato è

$$(x-y)^2 (x+y)^2 (x-2y)(2x+y).$$

Esercizio 10

Trovare il m.c.m. di

$$A(x) = 4x^6 - 4x^5 + 4x^3 - 13x^2 + 15x - 6;$$
$$B(x) = 4x^8 - 4x^7 - 9x^4 + 11x^3 - 2x^2 + 3x - 3.$$

Soluzione

E' facile operare le seguenti fattorizzazioni:

$A(x) = (x-1)(4x^5 + 4x^2 - 9x + 6)$;
$B(x) = (x-1)(4x^7 - 9x^3 + 2x^2 + 3)$.

A questo punto, però, non siamo in grado di stabilire se i polinomi

$$4x^5 + 4x^2 - 9x + 6 \ \text{ e } \ 4x^7 - 9x^3 + 2x^2 + 3$$

abbiano fattori comuni: possiamo solo dire che il polinomio finale

$$(x-1)(4x^5 + 4x^2 - 9x + 6)(4x^7 - 9x^3 + 2x^2 + 3)$$

è un multiplo comune di $A(x)$ e $B(x)$, ma che forse non è il minimo. L'ultimo esempio considerato mette in evidenza che in pratica non sempre è facile calcolare il m.c.m. di un insieme di polinomi. Fortunatamente, però, anche per i nostri scopi futuri (cfr. paragrafo successivo), il più delle volte è sufficiente calcolare un loro multiplo comune, anche se non è il minimo.

5. Espressioni razionali

Come è noto, una frazione che contiene al denominatore delle lettere (variabili) si dice *espressione algebrica razionale* o *frazione algebrica*. In altre parole, possiamo dire che una frazione algebrica può contenere polinomi al numeratore o al denominatore; naturalmente occorre escludere i valori delle variabili che annullano il denominatore.

Esempio 7

- $\dfrac{4}{x}$ con $x \neq 0$;
- $\dfrac{1-ab}{a^2-b^2}$ con $a \neq b$ e $a \neq -b$;
- $\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^6+1}$ con $x \in \mathbb{R}$.

Poiché ogni numero può essere considerato come un polinomio di grado zero, possiamo asserire che l'insieme delle funzioni algebriche contiene l'insieme delle frazioni numeriche. Di conseguenza, le operazioni algebriche con le relative proprietà, che ora definiremo, devono conservare nell'insieme delle frazioni algebriche tutte le proprietà già considerate per le frazioni numeriche.

5.1. Principio fondamentale delle frazioni

Se $A, B, C,$ e D sono polinomi, con B e D diversi dal polinomio nullo, risulta

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ se e solo se } A\cdot D = B\cdot C\,. \tag{7}$$

La conseguenza più importante di tale principio è che, data la frazione algebrica $\dfrac{A}{B}$, risulta

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot E}{B\cdot E} \tag{8}$$

qualunque sia il polinomio non nullo *E*.

La (8), scritta nella forma

$$\frac{A \cdot E}{B \cdot E} = \frac{A}{B}$$

spesso viene detta **legge di cancellazione**.

Grazie ad essa, si può dividere numeratore e denominatore per tutti i loro fattori comuni; in tal caso si dice che la frazione è stata *ridotta ai minimi termini*.

Esempio 8

- $\frac{8}{10} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{4}{5}$;
- $\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)(1)}{(x-y)(x+y)} =$ (dividendo numeratore e denominatore per il fattore comune x-y supposto diverso da zero)= $\frac{1}{x+y}$;
- $\frac{a^4b^3c}{3a^2bc^2} = \frac{a^2b^2}{3c}$ (fattore comune a^2bc);
- $\frac{abx+aby}{ax+bx+ay+by} = \frac{ab(x+y)}{(a+b)x+(a+b)y} = \frac{ab(x+y)}{(a+b)(x+y)} =$ (dividendo per $x+y$ supposto diverso da zero) = $\frac{ab}{(a+b)}$;

5.2. Moltiplicazione e divisione di frazioni

Il prodotto di due o più frazioni si ottiene moltiplicando tra loro i numeratori e i denominatori:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Esercizio 11

Calcolare il prodotto delle seguenti frazioni:

$$\frac{a}{b},\ \frac{x+y}{x-y},\ \frac{3x^2}{5y}$$

Soluzione

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{3x^2}{5y}=\frac{a\left(x+y\right)\left(3x^2\right)}{b\left(x-y\right)\left(5y\right)}=\frac{3ax^2\left(x+y\right)}{5by\left(x-y\right)}.$$

Esercizio 12

Calcolare il prodotto delle seguenti frazioni:

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2},\ \frac{a-b}{a+b},\ \frac{3\left(a+b\right)}{4a^2-1}$$

Soluzione

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{3\left(a+b\right)}{4a^2-1}=$$

= (ricordando alcune identità notevoli) =

$$\frac{\left(a+b\right)^2}{\left(a-b\right)\left(a+b\right)}\cdot\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{3\left(a+b\right)}{\left(2a-1\right)\left(2a+1\right)}=\frac{\left(a+b\right)^2\left(a-b\right)3\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)\left(a-b\right)\left(a+b\right)\left(2a-1\right)\left(2a+1\right)}=$$

=(dividendo numeratore e denominatore per i fattori comuni) =

$$=\frac{3\left(a+b\right)}{\left(2a-1\right)\left(2a+1\right)}=\frac{3\left(a+b\right)}{4a^2-1}.$$

A volte, come nell'esercizio precedente, prima di eseguire i prodotti conviene fattorizzare i numeratori e i denominatori.

La divisione di due frazioni algebriche si ottiene moltiplicando la frazione dividendo per la reciproca della frazione divisore:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$$

Esercizio 13

Dividere $\dfrac{3x^5}{4a^2}$ per $\dfrac{6x^2}{5a}$.

Soluzione

$$\frac{3x^5}{4a^2}:\frac{6x^2}{5a}=\frac{3x^5}{4a^2}\cdot\frac{5a}{6x^2}=\frac{15ax^5}{24a^2x^2}=\frac{5x^3}{8a}.$$

Esercizio 14

Dividere $\dfrac{x^2-y^2}{x+3y}$ per $\dfrac{x-y}{x^2+3xy}$.

Soluzione

$$\frac{x^2-y^2}{x+3y}:\frac{x-y}{x^2+3xy}=\frac{x^2-y^2}{x+3y}\cdot\frac{x^2+3xy}{x-y}=$$
$$=\frac{(x-y)(x+y)}{x+3y}\cdot\frac{x(x+3y)}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)x(x+3y)}{(x+3y)(x-y)}=x(x+y)=x^2+xy$$

5.3. Addizione e sottrazione di frazioni

La somma di due o più frazioni algebriche aventi lo stesso denominatore è la frazione avente al numeratore la somma dei numeratori e per denominatore il comune denominatore:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}-\frac{D}{B}=\frac{A+C-D}{B}$$

Esempio 9

- $$\frac{x}{2x+ay}+\frac{3x-y}{2x+ay}-\frac{4y+5c}{2x+ay}=\frac{x+3x-y-\left(4y+5c\right)}{2x+ay}=$$
$$=\frac{x+3x-y-4y-5c}{2x+ay}=\frac{4x-5y-5c}{2x+ay}.$$

Se le frazioni da sommare non hanno lo stesso denominatore, occorre sostituirle con frazioni equivalenti, ma con denominatore comune. Il procedimento è analogo a quello noto per le frazioni numeriche.

Date le frazioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, ecc…, per ridurle allo stesso denominatore occorre:

1) *Determinare il m.c.m. dei denominatori (o, in mancanza, il loro multiplo comune); sia mcm(B,D,…)=M;*

2) *Dividere M per B,D,… ottenendo rispettivamente i quozienti Q,S,…;*

3) *Allora per la (8) si ha che*

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot Q}{B\cdot Q}=\frac{A\cdot Q}{M}$$
$$\frac{C}{D}=\frac{C\cdot S}{D\cdot S}=\frac{C\cdot S}{M}$$
$$\vdots$$

Esercizio 15

Sommare le frazioni $\frac{2}{3-4x}$ e $\frac{1}{x+y}$

Soluzione

1) $mcm(3-4x, x+y)=(3-4x)(x+y)$;

2) $\frac{2}{3-4x}=\frac{2\left(x+y\right)}{\left(3-4x\right)\left(x+y\right)}$, $\qquad \frac{1}{x+y}=\frac{3-4x}{\left(3-4x\right)\left(x+y\right)}$.

$$\frac{2}{3-4x}+\frac{1}{x+y}=\frac{2\left(x+y\right)}{\left(3-4x\right)\left(x+y\right)}+\frac{3-4x}{\left(3-4x\right)\left(x+y\right)}=\frac{2\left(x+y\right)+\left(3-4x\right)}{\left(3-4x\right)\left(x+y\right)}=$$

$$= \frac{2x+2y+3-4x}{(3-4x)(x+y)} = \frac{2y+3-2x}{(3-4x)(x+y)} = \frac{2(y-x)+3}{(3-4x)(x+y)}.$$

Esercizio 16

Sommare le frazioni $\frac{3b}{a^2+ab}, \frac{2b}{ab-b^2}$ e $\frac{1}{a^3b-ab^3}$.

Soluzione

Essendo

$$a^2+ab = a(a+b)$$
$$ab-b^2 = b(a-b)$$
$$a^3b-ab^3 = ab\left(a^2-b^2\right) = ab(a-b)(a+b)$$

risulta $\quad mcm = ab(a-b)(a+b)$;

$$\frac{3b}{a(a+b)} + \frac{2b}{b(a-b)} + \frac{1}{ab(a-b)(a+b)} = \frac{3bb(a-b)+2ba(a+b)+1}{ab(a-b)(a+b)} =$$
$$= \frac{3b^2(a-b)+2ba(a+b)+1}{ab(a-b)(a+b)} =$$

5.4. Elevamento a potenza

L'elevamento a potenza di una frazione algebrica si definisce in perfetta analogia con le frazioni numeriche; pertanto, data la frazione algebrica $\frac{A}{B}$ e un intero positivo n, risulta:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$
$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n = \frac{B^n}{A^n}.$$

Esercizio 17

Calcolare $\left(\frac{2x+1}{x-1}\right);\left(\frac{2}{x+1}\right)^{-3}$

Soluzione

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2=\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{4x^2+4x+1}{x^2-2x+1};$$

$$\left(\frac{2}{x+1}\right)^{-3}=\left(\frac{x+1}{2}\right)^3=\frac{(x+1)^3}{2^3}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{8}.$$

6. La somma dei primi n numeri dispari consecutivi

Nel volume 1 del 1° livello a pag. 113, abbiamo dato la formula:

$$1+3+5+7+....+2n-1=n^2$$

che fornisce la somma dei primi n numeri dispari consecutivi, senza darne una dimostrazione rigorosa, cosa che ci accingiamo a fare.

Consideriamo un cerchio di raggio n, con n numero naturale maggiore di 1; l'area di questo cerchio è notoriamente πn^2 (Figura 1)

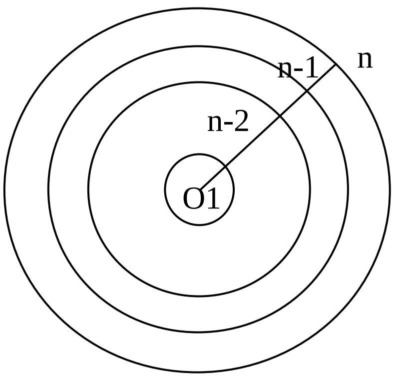


Figura 1

Inseriamo in questo cerchio *n* cerchi concentrici di raggi rispettivi *1, 2, 3, ..., n-1* . L'area del cerchio di raggio *n,* si può anche determinare sommando all’area del primo cerchio (raggio 1) le aree delle rimanenti corone circolari, per cui si ha:

$$\pi\cdot 1^2+\left(\pi 2^2-\pi 1^2\right)+\left(\pi 3^2-\pi 2^2\right)+\cdots+\left(\pi\left(k+1\right)^2-\pi\left(k\right)^2\right)+\cdots+$$

$$+\left(\pi\left(n\right)^2-\pi\left(n-1\right)^2\right)=\pi\left(1+3+5+\cdots+2k+1+\cdots+2n-1\right)$$

uguagliando le due espressioni si ha

$$\pi\left(1+3+5+\cdots+2k+1+\cdots+2n-1\right)=\pi n^2$$

e dividendo per π

$$\left(1+3+5+\cdots+2k+1+\cdots+2n-1\right)=n^2.$$

Q.E.D. .

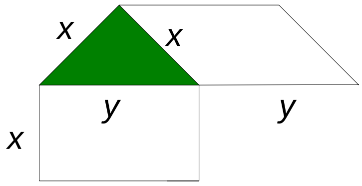
7. Esercizi supplementari

7.1. Espressioni algebriche

1. Calcolare il quadrato, diminuito del triplo dei seguenti numeri:

   2.5; 35; 42.25; 7.151; 86.182; 85.428.

2. Calcolare l'area evidenziata nella figura



per i seguenti valori di x e y:

x = 1.5, y = 2.7; x = 15, y = 25.8; x = 8.5, y = 6.41.

Qual è l'ordine di grandezza in ciascun caso?

Dire quali delle seguenti espressioni algebriche sono razionali, intere e quali fratte.

3. $2x^2+3x+1$; $\dfrac{5x^2-7}{x^2+1}$; $\dfrac{7x^3-3xy}{xy}$; $\dfrac{6x^2-3+x}{3}$.

4. $\dfrac{7x^2-1}{4x^3+1}$; $4xyz-1$; $\dfrac{2x^2}{y}$; $\dfrac{3x}{x^2+1}$

Scrivere sotto forma di espressione algebrica i seguenti enunciati:

5. Il quoziente fra la somma dei cubi di due numeri , diminuita del doppio della differenza dei loro quadrati, e la somma dei numeri stessi.
6. La somma dei cubi di due numeri, per il cubo della loro somma.
7. La somma del quadrato di un numero, e del quoziente fra il cubo dello stesso numero e del cubo successivo.
8. Il quoziente della differenza dei cubi di due numeri, e del reciproco della somma dei quadrati.
9. La differenza della somma di due numeri, e del reciproco della somma delle loro quarte potenze.
10. La differenza tra il prodotto di due numeri e il reciproco della loro somma al quadrato.
11. Il quoziente fra la somma delle quarte potenze di due numeri, aumentata del loro triplo prodotto, e la somma dei numeri stessi diminuita del loro doppio prodotto.
12. La differenza dei quadrati di due numeri è uguale al prodotto della loro somma per la loro differenza.
13. Il quadrato della somma di due numeri è uguale alla somma dei quadrati di ciascuno di essi e del loro doppio prodotto.
14. Il cubo della somma di due numeri è uguale alla somma dei cubi dei numeri dati e dei tripli prodotti del quadrato di ognuno di essi per l'altro.
15. Il quoziente della differenza tra il triplo del primo e il doppio del secondo, con la differenza dei loro quadrati.
16. Il prodotto della differenza dei quadrati di due numeri per la metà del quadrato di uno di essi.

Tradurre in enunciati le seguenti espressioni algebriche:

17. $2x(x+y)$; $\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$; $(x^2-y^2)-(x^3+y^3)$.

18. $2a+b^2$; $\quad \dfrac{2ab}{3\left(a^2+b^2\right)}$; $\quad \left(x^3+y^3\right)\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}\right)$.

19. $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(x+y)$; $\quad \left(x^2+y^2\right)-2xy$; $\quad \dfrac{3xy}{3x+2y}$

7.2. Monomi

20. Specificare il grado dei seguenti monomi:

$4x^2;\quad 7x^3;\quad 3;\quad 4x^2y;\quad 8xyz;\quad 5xy^3;\quad 5x;\quad \dfrac{1}{2};\quad 8x^8y^5.$

Eseguire le seguenti somme algebriche:

21. $3x^2y+7x^2y+\left(-\dfrac{3}{2}x^2y\right)+\dfrac{1}{3}yx^2.$ $\quad \left[\dfrac{53}{6}x^2y\right]$

22. $4a^3bc+\left(-\dfrac{1}{15}\right)a^3cb+\dfrac{1}{18}ca^3b.$ $\quad \left[\dfrac{359}{90}ca^3b\right]$

23. $7a^2y^2z+\dfrac{1}{3}a^2y^2z-\dfrac{1}{5}a^2y^2z+a^2b^2c.$ $\quad \left[\dfrac{107}{105}a^2y^2z+a^2b^2c\right]$

24. $\dfrac{1}{2}a^3+\left(-\dfrac{1}{3}a^2\right)+\dfrac{1}{6}a+\left(-a^3\right)+\dfrac{1}{3}a-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}a^3$ $\quad \left[-\dfrac{5}{6}a^2+\dfrac{1}{2}a\right]$

25. $3m^2n-2mn^2-\dfrac{1}{4}mn^2-4m^2n+\dfrac{1}{5}mn^2.$ $\quad \left[-m^2n-\dfrac{41}{20}mn^2\right]$

26. $4ab-6abc+\dfrac{1}{2}ab-4abc^2.$ $\quad \left[\dfrac{9}{2}ab-2abc(3+2c)\right.$

27. $12x^2y^2-7xy^2+3x^2y^2-4x^2y+5y^2x-3x^2y$ $\quad \left[15x^2y^2-2xy^2-7x^2\right.$

28. $0.01x^3+0.0\overline{1}y^3-2.\overline{1}x^3-7y^3+1.$ $\quad \left[-2.10\overline{1}x^3-6.9\overline{8}y^3+1\right]$

29. $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{3}x^2y^2+\dfrac{1}{5}x^2y^2-\dfrac{1}{6}y^2-\dfrac{1}{3}x^2.$ $\quad \left[-\dfrac{2}{15}x^2y^2-\dfrac{1}{12}x^2-\dfrac{1}{6}y^2\right]$

30. $z^3-3x^2z+\dfrac{1}{5}z^3-z^2x+\dfrac{1}{4}x^2z.$ $\quad \left[\dfrac{6}{5}z^3-z^2x-\dfrac{11}{4}x^2z\right]$

31. $mn-2n^2+\frac{mn^2}{3}-\frac{n^2}{5}-mn+15mn^2+\frac{mn}{2}.$ $\qquad\left[\frac{mn}{2}-\frac{11}{5}n^2+\frac{46}{3}mn^2\right]$

32. $-\frac{4}{5}a^3x^2y^n+0.1a^nx^2y-ax^n+5a^3x^2y^n+ax^n+$
$-\frac{1}{5}a^nx^2y-4a^3x^2y^n+-\frac{33}{12}ax^n-a^3x^2y^n$

$$\left[-\frac{4}{5}a^3x^2y^n-\frac{1}{10}a^nx^2y-\frac{33}{12}ax^n\right]$$

33. $6x^3y^3-\frac{3}{2}x+8ax^2y-x^3y^3+2ax^2-5x+$
$+\frac{16}{3}ax^2y-5x^3y^3-\frac{40}{3}ax^2y$ $\qquad\left[-\frac{13}{2}x+2ax^2\right]$

34. $10a^2b-15ab^2-\frac{1}{3}a^2b-\frac{4}{5}ab^2+$
$+a^2+\frac{1}{3}a^2b+\frac{5}{6}a^2+\frac{4}{5}a^2b-\frac{11}{6}a^2+\frac{4}{5}ab^2$ $\qquad\left[\frac{54}{5}a^2b-15ab^2\right]$

35. $\frac{3}{2}a^3b+\frac{1}{4}a^2b^3+5a^3b+2ab^3-\frac{10}{3}a^3b-\frac{1}{2}a^2b^3+$
$-ab^3-\frac{1}{2}a^2b^3+\frac{3}{4}a^2b^3-\frac{1}{5}ab^3-\frac{4}{5}ab^3-\frac{19}{6}a^3b$ $\qquad[0]$

36. $0.2x^3-\frac{1}{8}xy^3+0.5y^3-\frac{3}{4}xy^3-\frac{3}{2}x^3+$
$+\frac{1}{4}xy^3-\frac{1}{5}y^3+\frac{11}{16}xy^3$ $\qquad\left[-\frac{3}{10}x^3+\frac{1}{16}xy^3\right]$

37. $\frac{7}{2}x^2y^2z^2-\frac{3}{2}xy^2+\frac{5}{6}x^2y+$
$-\frac{1}{6}x^2y^2z^2-\frac{6}{5}x^2y+\frac{1}{13}xy^2+\frac{11}{30}x^2y$ $\qquad\left[\frac{10}{3}x^2y^2z^2-\frac{37}{26}xy^2\right]$

Completare in modo che le seguenti espressioni risultino monomi simili:

38. $3x^2$ ________; y^2 ________; $\frac{1}{2}$ ________.

39. a^3bc; $7a^3c$————; $\frac{1}{5}abc$.

40. xy————; $\frac{1}{4}yz$————; $2x$——— ———.

Eseguire i seguenti prodotti di monomi:

41. $2x(2y)$; $4xy(-a)$; $\frac{1}{5}x\left(-\frac{5}{4}x^3\right)$; $(-3a)(-6b)$.

42. $(-3ab)\left(\frac{1}{3}ab^2\right)$; $\left(\frac{2}{5}s^2t^3\right)(-2)\left(\frac{1}{3}st\right)t^2$; $\left(-\frac{1}{4}a^3b^3c\right)(2ab)$.

43. $\left(-\frac{1}{7}a^2\right)\left(\frac{7}{3}abx\right)$; $\left(-\frac{3}{4}x^3y^3z\right)(5ab)\left(-\frac{1}{25}a^2x^2\right)$.

44. $\left(\frac{1}{6}a^2\right)(-abx)(-2)$; $\left(-\frac{5}{11}a^5b^5z\right)\left(\frac{22}{3}a\right)\left(-\frac{3}{5}a^2b^2\right)$.

45. $\left(-\frac{21}{18}m^3n^4\right)\left(-\frac{5}{3}mn^4\right)\left(-\frac{11}{7}m^3n^4\right)\left(\frac{6}{5}m^4n\right)$ $\left[-\frac{11}{3}m^{11}n^{13}\right]$

46. $\left(-\frac{4}{3}a^3bc\right)(5.25ad)\left(\frac{3}{8}b^3d^4\right)(-0.33)$ $\left[-\frac{6.93}{8}a^4b^4cd^5\right]$

47. $\left(\frac{1}{4}a^2c\right)\left(-\frac{7}{3}b^2d^4\right)(62.5c^4)\left(-\frac{2}{3}c^2b^4\right)$ $\left[\frac{437.5}{18}a^2c^7b^6d^4\right]$

48. $\left(\frac{8}{3}a+\frac{12}{5}a\right)\left(\frac{4}{5}ac+\frac{2}{3}ac\right)b\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{8}c\right)$ $\left[\frac{209}{450}a^3c^2b\right]$

49. $\left(\frac{4}{9}m^2n^6\right)\left(\frac{1}{16}m^2n\right)\left(-\frac{11}{16}m^3n^2\right)\left(\frac{9}{5}m^7n\right)$ $\left[-\frac{11}{250}m^{14}n^{10}\right]$

50. $5a^2b^2\left(-\frac{3}{2}ab^3x^2\right)\left(\frac{3}{2}a^2b^4\right)\left(-\frac{4}{5}a^2b^3\right)(-abx)$ $\left[-9a^8b^{13}x^3\right]$

51. $0.2ab\left(-\frac{5}{12}a^2b^2c\right)\left(\frac{25}{4}ab^3\right)(-0.3b^7)(0.02a^5)$ $\left[\frac{1}{320}a^9b^{13}c\right]$

52. $-\frac{1}{5}xyz\left(\frac{1}{3}x^2y^2\right)(-0.05z^2)\left(-\frac{10}{3}x^2y^2z^2\right)(xyz^3)$

53. $-\frac{4}{3}mn^2p(-6mn^2p)\left(\frac{5}{6}mp^3\right)(30n^2p^5)\left(-\frac{11}{12}m^3n^2p\right)$ $\left[-\frac{550}{3}m^6n^8p^{11}\right]$

Calcolare il valore delle seguenti espressioni algebriche:

54. $-5x^2y(-3xy^2)+4x^3y^3-(-6x^3y)(-3x^2)-5x^3y^3.$ $\left[14x^3y^3-18x^5y\right]$

55. $-2ab\left[\frac{1}{3}ab-3a\left(-\frac{1}{2}b\right)+6ab\right]+2a^2-4a^2b.$ $\left[-\frac{47}{3}a^2b^2+2a^2-4a^2b\right]$

56. $\left[-2x(-3xy)+x^2y-y\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right]\cdot\left(x+\frac{3}{2}x\right).$ $\left[\frac{75}{4}x^3y\right]$

57. $\left[4a\left(\frac{3}{2}ab\right)+a^2b-3b\left(-\frac{1}{6}a^2\right)\right]\cdot\left(a+\frac{1}{2}a\right).$ $\left[\frac{27}{4}a^3b\right]$

58. $xy+\frac{1}{3}x^2+y^2+x(3x)-xy-\frac{1}{2}x^2+y^2+\frac{9}{2}x\left(-\frac{1}{3}x\right).$ $\left[\frac{4}{3}x^2+2y^2\right]$

59. $-\frac{3}{2}xy\left(\frac{1}{4}xy^2\right)+\frac{1}{2}xy^2\left(-\frac{1}{2}xy\right)+(-2xy)\left(-\frac{1}{2}xy^2\right).$ $\left[\frac{3}{8}x^2y^3\right]$

60. $\left(-\frac{2}{3}x^3y^2\right)(-3x^2y^2)+\frac{2}{3}x^2y\left(\frac{1}{2}x^3\right)\left(-\frac{8}{5}y^3\right).$ $\left[\frac{22}{15}x^5y^4\right]$

61. $6a^5b^3\left(-\frac{3}{4}a^{-1}b\right)+\frac{3}{4}a^2b\left(-\frac{4}{5}ab\right)\left(-\frac{16}{9}ab^2\right).$ $\left[\frac{167}{30}a^4b^4\right]$

62. $\left[2x-\frac{1}{3}x^2\left(y+\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{6}x^3\right]2x.$ $\left[\frac{2}{3}x^2(6-xy-x^2)\right]$

63. $(-2ab)\left(-\frac{1}{4}a\right)(-8b)+4a^2b^2+(-2a)(-2b)+a.$ $[4ab+a]$

64. $2a-\frac{3}{2}b\left[(-3a^2)(-2b)+2a^2b+10a^2(-b)\right]-2a.$ $\left[3a^2b^2\right]$

65. $\left(\frac{1}{3}a^3b^3-2a^2b+\frac{1}{5}a^3-a^2b+\frac{3}{4}a^2b\right)\frac{4}{3}a^3+3a^5b.$ $\left[\frac{4}{9}a^6b^3+\frac{4}{15}a^6\right]$

66. $\left[\left(-\frac{2}{a^2b}x^2y^3\right)^3+\left(-5x^4\right)^{-2}\right]2x.$ $\left[-\frac{16x^7y^9}{a^6b^3}+\frac{2}{25x^7}\right]$

67. $4a^2-\frac{3}{2}\left[(4a)\left(\frac{2}{3}a\right)+2ab^2\left(\frac{3}{5}a\right)-\left(\frac{1}{5}a^2\right)6b^2\right].$ $[0]$

68. $\left(-\frac{3}{7}x^2yz-x^2yz\right)\left(-\frac{2}{3}y\right)\left(9z^2\right)+\frac{3}{7}xy\left(-2x^2yz\right)(-14z).$

$\left[\frac{60}{7}x^2y^2z^3+12x^3y^2z^2\right]$

69. $3ab\left(\frac{3}{4}a^{-1}b\right)+\frac{9}{4}b(-b)+\left(3a^2\right)\left(-\frac{1}{3}a^{-3}\right)a.$ $[-1]$

70. $4m-\frac{2}{3}n\left[\left(-8m^2\right)(-12n)+9m^2n^2\left(10n^{-1}\right)+2m\left(\frac{1}{3}n\right)\right]-4m.$

$\left[-124m^2n^2-\frac{4}{9}mn^2\right]$

71. $-2a(4a+3b)+\left[a\left(b+\frac{15}{3}b\right)+3a\left(a+\frac{3}{7}b\right)+5a^2+b\right].$ $\left[\frac{9}{7}ab+b\right]$

Completare le seguenti espressioni:

72. $\left(a^3\right)^2b=a^{\cdots\cdots}\,b;\quad \frac{1}{4}a^8c^2=\frac{1}{2^{\cdots\cdots}}\left(a^2\right)^{\cdots\cdots}c^2;\quad a^3a^5=\left(a^4\right)^{\cdots\cdots}.$

73. $\frac{1}{27}a^6b^3=\left(\frac{1}{\cdots\cdots}a^{\cdots\cdots}\,b\right)^3;\quad 0.25a^4b^2=(\ldots\ldots)^2.$

74. $x^9\frac{y^3}{8}=(\ldots\ldots)^3;\quad \left(\frac{1}{3}a^2\right)^3\left(-\frac{1}{5}b^3\right)^3=(\ldots\ldots)^3.$

75. $\left(\frac{4}{5}x^2y\right)^3\left(-\frac{1}{5}z^2y\right)^3=\left(-\frac{2}{5}x^{\cdots\cdots}y^{\cdots\cdots}z^{\cdots\cdots}\right)^{\cdots\cdots}.$

76. $\left(-2y^2x\right)^4\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)^3=-2\left(x^{\cdots\cdots}y^{\cdots\cdots}\right)^2.$

Ridurre in forma più semplice le seguenti espressioni:

77. $\left(-\frac{1}{8}a^2b\right)^2(-2ab)\left(-\frac{3}{4}a^2b^2\right)^3;\quad \left(\frac{3}{4}x^2y\right)\left(-\frac{2}{3}xy\right)^2.$

$\left[\frac{27}{2048}a^{11}b^9;\ \frac{1}{3}x^4y^3\right]$

78. $\left\{(-3a^2)+(-2a)\left[(-3a)+\frac{8}{3}a\right]^3+(-4a^2)\right\}\frac{1}{2}a^2c.$ $\left[\frac{137}{54}a^6c\right]$

79. $\left\{x^6+x^2\left(-\frac{1}{2}x^4\right)+x^3\left[2x+\left(-\frac{3}{2}x\right)\right]^3+\left(-\frac{5}{8}x^6\right)\right\}\frac{47}{23}x^7a^2z^4.$ $[0]$

80. $(-2a)(-2ab)^2-3b\left[2a^2b-(3a)^2(-2b)\right]+8a^3b^2.$ $\left[-60a^2b^2\right]$

81. $\left[-2ab^3-(-2ab)(-b)^2\right]\cdot[(-2b)(-a)+2ab]^2.$ $[0]$

82. $(2a^2b)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^3+\left(\frac{3}{2}a^2b^2\right)^4\cdot\left(-\frac{2}{3}ab\right)-(2a^3)\cdot\left(-\frac{3}{2}a^2b^3\right)^3.$

$\left[\frac{19}{8}a^9b^9\right]$

Eseguire le seguenti divisioni:

83. $(-5a^2b^2):\left(\frac{1}{2}ab^2\right);\quad \left(\frac{3}{7}x^3\right):(-4x);\quad \left(-\frac{8}{3}x^4\right):\left(-\frac{1}{3}x\right).$

$\left[-10a;\ -\frac{3}{28}x^2;\ 8x^3\right]$

84. $\left(\frac{3}{4}a^5b^2c\right):\left(-\frac{5}{8}a^4c\right);\quad \left(-\frac{3}{5}x^3y^2z^3\right):\left(\frac{1}{5}x^2yz^2\right);\quad \left(\frac{1}{7}a^3b^7\right):\left(\frac{2}{7}a^2b^3\right).$

$\left[-\frac{6}{5}ab^2;\ -3xyz;\ -\frac{1}{2}ab^4\right]$

85. $12a^5b^3c:(-4a^3b^2c);\quad 4x^5y^2:\left(-\frac{1}{2}x^2\right);\quad (15x^3y^2):(5xy)\cdot\left(-\frac{1}{3}a^2b^2\right).$

$\left[-3a^2b;\ -8x^3y^2;\ -x^2ya^2b^2\right]$

86. $(-16x^2y^3):(-2x^4y^2):\left(\frac{8}{5}x^2y\right);\quad (-18x^4y^3z^2):(-9x^3y);\quad \left(-\frac{3}{2}xy\right)^2:\left(-\frac{1}{3}x\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right).$

$\left[\frac{5}{x^4};\ 2xy^2z^2;\ \frac{243}{8}y^2\right]$

87. $\frac{4}{5}x^2y^2z:\left(-\frac{1}{5}xy\right)$; $\left(-\frac{7}{4}x^2y\right):\left(-\frac{1}{5}\right)$; $\frac{3}{2}x^2y:\frac{1}{4}y$.

$$\left[-4xyz; \frac{35}{4}x^2y; 6x^2\right]$$

Completare le seguenti scritture in modo che l'uguaglianza sia valida:

88. $-\frac{1}{3}x^3y:\ \ldots\ldots\ldots = 9xy$; $\ldots\ldots\ldots :2x^4y^2 = \frac{1}{4}x^5y$.

89. $\left(-\frac{2}{3}x^3y^2\right):\ \ldots\ldots\ldots = -2x^2y$; $(\ldots\ldots\ldots):(-2xy^2z^3) = -\frac{2}{5}x^3yz^2$.

90. $(0.5x^3y^2z^4):\ \ldots\ldots\ldots\ 2.5y$; $(\ldots\ldots\ldots):(-0.5x^3y^2) = -4x^{-1}y$.

91. $\left(-\frac{2}{5}ab^{-2}\right):\ \ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{2}a^2b$; $(\ldots\ldots\ldots):(4x^2) = \frac{1}{2}x^{m-2}$.

92. $\left(-\frac{2}{3}x^{m+2}y^{m+3}\right):\ \ldots\ldots\ldots = 2x^2y^{m-1}$; $(\ldots\ldots\ldots):\left(-\frac{3}{2}b^2\right) = -\frac{1}{2}ab^{-2}$.

Ridurre in forma più semplice le seguenti espressioni:

93. $\left[(3x^4y^4):(x^2y^2) - x^2y^2\right]:(xy) - 6xy + xy\left[(3x^3:x^2):x\right]$. $[-xy]$

94. $(-0.2x^4 + 0.6x^4)^2:\left(3x - \frac{5}{2}x\right)^{-1} + (0.5x)^3(-2x^3)^2$. $[-0.42x^9]$

95. $\left[(-x^2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x^3\right)(2x)\right]:\left[(-2a^5b)^2 - a^7\cdot\left(\frac{1}{2}a^3b^2\right)\right]$. $[0]$

96. $\left\{\left[-x^2 + \frac{3}{2}x\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right)\right]:\left[-xy + x^3y^2:(-2x^2y)\right]\right\}^2$. $\left[\frac{16}{9}x^2y^{-2}\right]$

97. $\left\{\left[a^{m+2}b^n - a^2b\cdot(-a^mb^{n-1})\right]^2:\left(a^{2m}b^{2n} - \frac{1}{2}a^{2m}b^{2n}\right)\right\}:8a^4$. $[1]$

98. $\left[(-2a^2):a\right]^2:(-4a) + (-3a^2)^2:(-2a^3) + 5a + \frac{a}{2}$. $[0]$

99. $\left[3x^5y^2(-2x^3y):(-x^4y^3)\right]^2:(-2x^4) + (-6x^5y^3):(-6xy^3) - \frac{1}{3}x^4$. $\left[-\frac{52}{3}x^4\right]$

100. $\left\{\left[-3m^3p:(-2mp)\right](-2pm)+3m^3p\right\}^3+\left[2m^2:3m+m:3\right]^2m-m^3.$ [0]

101. $\left(x^m y^2\right):\left(x^m y\right)+\left(x^{m+1}:x^{m+1}\right)\left(-2y\right)+y^{m+1}:y^m \quad \left(\text{con } m\in\mathbb{N}\right).$ [0]

Determinare il M.C.D. ed il m.c.m. dei seguenti monomi:

102. $2a, \quad 6a^2, \quad 5a^3.$

103. $-3x^2y, \quad 5x^3, \quad 2x^2y.$

104. $-2a^4b^5, \quad 3ab^6c, \quad -5ac^5.$

105. $4x^3y^2, \quad 3x^3z^3, \quad 5\text{yz}.$

106. $100a^3b^3c^2, \quad 20abc^5, \quad -10ac^4.$

107. $\frac{1}{3}x^4y^6, \quad 2x^3y, \quad -\frac{1}{4}x^4.$

108. $15x^2y, \quad 30xy^2, \quad 60y.$

109. $11xy^2z, \quad 22x^2z, \quad 33z^2.$

110. $21x^3y^5, \quad -49xyz, \quad 35x^2y, \quad 7x^7yz^3.$

111. $4x^5y^3z, \quad -8xy^2z^3, \quad -12x^2y^3z^4.$

112. $8a^3b^2, \quad -10a^2b^3c, \quad 5a^2b^4c^2.$

113. $3a^nb^{3m}, \quad -6a^{2n}b^m, \quad 24a^{3n}y^{2m}z^5.$

114. $7x^8y^2z, \quad 21x^6yz^2, \quad 14x^2y^4z^4.$

Rispondere alle seguenti domande e completare ove occorre.

115. Quando due espressioni algebriche si dicono *identiche* ?

116. Qual è l'esatta definizione del termine *monomio* ?

117. Che cosa sono il *grado rispetto ad una lettera* e il *grado complessivo* di un monomio ?

118. Un monomio si dice di *grado zero* se ....

119. Due o più monomi si dicono *simili* se ...., *identici* se ...., *opposti* se..............................

120. Quale risultato si ottiene sommando due *monomi opposti* ?

121. Dati due monomi, si dice che il primo è *divisibile* per il secondo se ....

7.3. Polinomi

Determinare il grado dei seguenti polinomi:

122. $5x^2yz - \frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{4}xz^2$; $\quad 0.8x^4 - 3x^2y^2 + 2$.

123. $4x^3 - 2x^2y^2 + x + y$; $\quad 6x^2y^2a + 5a^2 - 3b^2 + 1$.

124. $1.25x^6 + 7.4x^3 - 2x^3 + 2$; $\quad 2.5x^2y^3 - x^4 + y^4 - 2$.

Nelle seguenti espressioni algebriche, riconoscere i polinomi:

125. $x^4 - 3xy + 2$; $\quad \frac{1}{x} + 2 - 3x$; $\quad \sqrt{x} + 2y - 5$.

126. $2\sqrt{5}x^2 + 2y^2 - 1$; $\quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{y} + 3$; $\quad z^2 + az - b + \frac{1}{2}$.

Stabilire se i seguenti polinomi sono interi o fratti:

127. $-\frac{3}{4}x^2y^3 + \frac{1}{2}xy^{-1} + 5x$; $\quad -\frac{2}{3}xa^4 + \frac{4}{5}bx^2 - \frac{7}{9}a + 5$.

128. $-4a^3\frac{b}{x} - \frac{1}{2}a^{-2}b^3c + 4$; $\quad -\frac{7}{8}a^2x^2 - \frac{3ab}{c} + \frac{5}{9}a^3b^2$.

129. $4a^3b^2x - \frac{5}{8}a + 7 - \frac{3}{5}b$; $\quad -a^2b^2c - \frac{1}{x} + 14a^2b^3 - \frac{1}{5}$.

Ordinare in senso decrescente i seguenti polinomi:

130. $3 + 4x^2 + 5x^5 - 7x^4 + 2x^3$; $\quad 6x^2y^2 - 3x^2y - 6x^5 + 2$.

131. $3x^3 - 7x + 8x^5 - 2x^4 + 1$; $\quad 48x^2 - 45 + 6x^3 - 7x^4 + 2$.

132. $5.5y-6y^3+4.5y^4-2; \quad 8xy-7x+4y-5x^2y^2.$

133. $2a^3-a^4+2a-3a^2+4; \quad xy-0.5x^2+1.7y^2.$

Rendere completi i seguenti polinomi nella lettera *x* e ordinarli secondo le potenze decrescenti di tale lettera:

134. $4x^2-11x^4+7x-9x^7+3-4x^6.$

135. $7x^4-10x^3+3x^7+7x^2-8+2x.$

136. $2x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}x^3+4x^7-\frac{1}{2}x^4-2x^5+2.$

Eseguire le seguenti somme algebriche:

137. $(3bc+c-d)+(5bc+3c-4d)+(4b-4cb+d).$
$[4(bc+c-d+b)]$

138. $(3x^2+x-1)-(2x^2+7x+4y-1)+(-4x^2+5x-1).$
$[-3x^2-x-4y-1]$

139. $(2y+3z-5yz)+(4yz-3z+6y)-\left(-\frac{9}{2}y+2yz+1\right). \qquad \left[\frac{25}{2}y-3yz-1\right]$

140. $\left[-\frac{5}{2}+0.2-(0.3x+0.2y)\right]-\{-[0.3+0.8x-(x+0.1y)]+2x\}.$

141. $[-2-2.5x-0.3y]$

142. $\left(3+\frac{1}{a}-b^2\right)-\left(2-\frac{2}{a}+\frac{1}{2}b^2\right).$

$\left[1+\frac{3}{a}-\frac{3}{2}b^2\right]$

143. $\left[\frac{x^2y^2}{3}-xy+\left(\frac{2xy}{3}-x^2y^2\right)\right]-\left\{\frac{xy}{2}-\left[2xy-\left(xy-\frac{x^2y^2}{3}\right)\right]\right\}.$

$\left[-\frac{x^2y^2}{3}+\frac{1}{6}xy\right]$

144. $\left(\frac{1}{4}a^2b-a^2c-\frac{abc}{3}\right)-(2abc-a^2c)-(-3a^2c+a^2b).$

$$\left[-\frac{3}{4}a^2b+3a^2c-\frac{7}{3}abc\right]$$

145. $\left(0.5x^3+0.5x+0.3\right)-\left(0.5x-2.5x^3-0.1\right)$. $\left[3x^3+0.4\right]$

146. $\left(1.5xy-0.3y^2-0.5\right)+\left(0.6y^2-0.3+xy\right)+\left(1-\frac{xy}{2}\right)$. $\left[2xy+0.3y^2+0.2\right]$

147. $\left(0.375a-0.5a^3+0.25a^2\right)+\left(0.5a-0.8a^3+0.75a^2\right)$.
$\left[0.875a-1.3a^3+a^2\right]$

Eseguire i seguenti prodotti di polinomi:

148. $\left(6x^2y+z\right)(2x+3y)$; $\quad -10x^2yz^2\left(6xyz^2-4xy\right)$.

149. $\left(3x^2yz-4xy^2z^3\right)\left(2xy^2z^4\right)$; $\quad (2x+5)(x-3)$.

150. $8p^3q^4r^5\left(4p^2q^3-3q^5r^6\right)-4p^3q^7r^4\left(8p^2r-3p^3q-6q^2r^7\right)$.

151. $3+x[-2+x(4+x)]$; $\quad -4+x\{2+x[-1+x(2+3x)]\}$.

152. $3x\left(-2x^2+4x-1\right)+4x\left(x^2+6x-5\right)$.

153. $(3b-1)(1+4b)$; $\quad (3x+y)(2x-3y)$; $\quad (x-a)(x-b)$.

154. $(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$; $\quad (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$.

155. $(x-2y)\left(x^2+xy-y^2\right)$; $\quad (a+b)\left(2a^2-3ab-2b^2\right)$.

156. $\left(3x^2+2xy-2y^2\right)\left(2x^2+xy-3y\right)$.

157. $\left(3x^2-xy+2y^2\right)\left(x^2+3xy-y^2\right)$; $\quad \left(5x^2+x-1\right)\left(4x^2+x-2\right)$.

158. $\left(-x^2+2x+3\right)\left(-x^2-3x-3\right)$; $\quad \left(x^3-x^2y+2xy+2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)$.

159. $(a+b+2c)(a+b-2c)$; $\quad (2a-3b)(2a+3b)$.

Ridurre in forma più semplice le seguenti espressioni:

160. $\left(4x^4-3\right)\left(4x^4-1\right)-\left(4x^4-6x^2+1\right)\left[2x^2\left(2x^2+3\right)+1\right]$. $\left[2\left(6x^4+1\right)\right]$.

161. $(a+x+y)(a-x+y)-(x+y)(x-y)+3x(x-y)$.
$\left[\left(x^2+2y^2-3xy\right)+a(2y+a)\right]$

162. $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x^2y\right)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2y\right)-\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}x^2y\right)\left(\frac{5}{4}x^2y+\frac{3}{2}x^2\right).$

$\left[\frac{5}{6}x^5y-\frac{25}{8}x^4y^2-\frac{15}{4}x^4y-x^5\right]$

163. $[(3x-1)(3x+1)]^2-\left(9x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$ $\left[-9x^2+1\right]$

164. $\left(\frac{1}{5}x^2+1\right)^2\left(\frac{1}{5}x^2-1\right)^2-\frac{1}{5}x^2\left(5-\frac{1}{5}x^2\right).$

$\left[\frac{1}{625}x^8-\frac{1}{25}x^4-x^2+1\right]$

165. $(a+3b-c)^2-(2a+b+3c)(2a+b-3c).$

$\left[-3a^2+8b^2+10c^2-2ac+2ab-6bc\right]$

166. $(3a-b)(3a+b+c)+(b-2a)(b+1+2a).$ $[a(5a+3c-2)+b(1-c)]$

167. $\left(-\frac{2}{3}ab^2\right)^2\cdot(3a-9b)-\left(2ab^2-1\right)^2(a+3b).$

$\left[4ab^2\left(3b-\frac{2}{3}a^2b^2-4ab^3+a\right)-a-3b\right]$

168. $\{-3x+[-2y+(x-3y)]\}^2-[5x-(x+3y)]^2-xy.$ $\left[-12x^2+43xy+16y^2\right]$

169. $\left(4a^4-3\right)\left(4a^4-1\right)-\left(4a^4-6a^2+1\right)-\left[2a^2\left(2a^2+3\right)+1\right]-2.$

$\left[16a^8-24a^4-1\right]$

170. $(-x+2)\left(5+2x+x^2-5x^3+x^4\right)+x\left(x^4-7x^3\right)+x\left(11x^2+1\right).$ $[10]$

171. $\left[\left(2a^2+2a+1\right)\left(2a^2-2a+1\right)\left(4a^4-1\right)-16a^8\right](-2a)+a(2a-2).$ $\left[2a^2\right]$

Calcolare con un calcolatore con display a otto cifre il prodotto esatto $P\times Q$, per i seguenti valori di P e Q:

172. $P=34789532$, $Q=743567$.

173. $P=4567321$, $Q=743561$.

174. $P=7894352$, $Q=203452$.

175. $P=503102433$, $Q=857472921$.

176. $P=55789977$, $Q=41427894$.

177. $P = 11043253,$ $Q = 78923533$.

Utilizzando, eventualmente, identità notevoli, calcolare il valore delle seguenti espressioni:

178. $(x-1)(x+2);\quad (x+2)(x-4);\quad (5x+2)(5x-3)$.

179. $(x+2y)(x-4y);\quad (8k-3m)(9k+5m)$.

180. $(0.11x-y)(0.11x+y);\quad (3a+2b)^2$.

181. $(x+3y)^3;\quad (a+b+c)^2;\quad (-2x+4y)^3$.

182. $\left(\frac{x}{3}+2y\right)^3;\quad \left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)^3;\quad (2x-y+3z)^2$.

183. $\left(a^m+b^{m+1}\right)^2;\quad \left(x^m+1\right)^3;\quad \left(3a^{m+1}+2\right)\left(3a^{m+1}-2\right)$.

184. $(2x+y+z-1)(2x+y-z+1);\quad \left(a^2+3a+b\right)\left(b-a^2+3a\right)$.

185. $(2+3b-a+3c)(2-3b+a+3c);\quad \left(\frac{3}{2}a^2-1-a\right)\left(\frac{3}{2}a^2-1+a\right)$.

186. $\left(a^3-2a^2+3a\right)^3;\quad \left(1+2x^2y^2z\right)\left(4x^4y^4z^2+1\right)\left(2x^2y^2z-1\right)$.

187. $\left(\frac{a^2b^2}{4}-ab\right)^2;\quad \left(3x-\frac{xy}{3}\right)^3$.

188. $\left(\frac{1}{5}a-5b^2\right)^2;\quad \left(a-b^2\right)^3$.

189. $\left(-a^2-b^2-c^2\right);\quad \left(-x^2-x+1\right)^2$.

Completare in modo che l'uguaglianza sia valida:

190. $\left(4x^2+........\right)=(2x+y)^2;\quad (x-y+z)(x-y........)=\left(x^2+y^2-2xy-z^2\right)$.

191. $\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x^2.....\ .....\right)=\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)$.

192. $\left(a^2+2a+7\right)\left(a^2+.....\ .....\right)=\left(a^4+10a^2+49\right)$.

Rispondere alle seguenti domande e completare ove occorre.

193. Che cos'è un *polinomio*?

194. Un polinomio si dice *ridotto* se ....

195. Un polinomio si dice *binomio* se .... , *trinomio* se ...., *quadrinomio* se......................

196. Quando un polinomio si dice *intero* e quando *fratto*?

197. Come si stabiliscono il *grado rispetto ad una lettera* ed il *grado assoluto* di un polinomio ?

198. Un polinomio si dice *omogeneo* se ....

199. Un polinomio si dice *completo* se ....

200. Che cosa sono gli *zeri* o anche *radici* di un polinomio?

7.4. Principio di identità dei polinomi

Utilizzando il principio di identità dei polinomi, dimostrare che le seguenti coppie di polinomi sono identici:

201. $x^2+16x+60$, $\quad (x+6)(x+10)$.

202. $x^2-10x-75$, $\quad (x+5)(x-15)$.

203. (x^3+1), $\quad (x+1)(x^2-x+1)$.

204. x^3-1, $\quad (x-1)(x^2+x+1)$.

205. $12x^2+71x-60$, $\quad (4x - 3)(3x+20)$.

206. $2x^2+3x+5$, $\quad 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}$.

207. $6x^2-3x+1$, $\quad 6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}-9x-\frac{17}{4}$.

208. $4x^2+19x+5$, $\quad 7x^2+5x-(3x+1)(x-5)$.

209. $5x^2+6x+8$, $\quad (4x^2-1)+(3+x)^2$.

210. x^4-x^2, $\quad x^2(x-1)(x+1)$.

211. x^2+4x-5, $\quad (x-1)(x+5)$.

212. $x^3-19x-30$, $\quad (x-5)(x+3)(x+2)$.

7.5. Divisione di un polinomio per un binomio

213. Scrivi algoritmo e relativo diagramma di flusso nei seguenti casi:
   a. per il calcolo del valore del polinomio $A(x)$ in un punto z
   b. per il calcolo di polinomio quoziente e resto della divisione $A(x):x-z$.

Calcolare il valore del polinomio $A(x)$ nei punti z indicati determinando anche il polinomio quoziente ed il resto della divisione $A(x)$ per $x-z$.

214. $A(x)=x^3+3x^2+x-1, \quad \left(z=1,\frac{1}{2},-1\right).$

215. $A(x)=x^5+0.51x^4-3x^2+0.8, \quad (z=1,0.7,8).$

216. $A(x)=4x^3+2x^2-5x-3, \quad (z=1,-1,2).$

217. $A(x)=-1.5x^3+4x^2-0.25x-14.4, \quad (z=1,-1.5,1.5).$

218. $A(x)=5a^4-2a^2+3-a, \quad (z=1,-1-0.2).$

219. $A(x)=x^4-x^3+x-2, \quad (z=1,-2,-0.5).$

220. $A(x)=6x^5-3x^4+2x^3-2x+2, \quad \left(z=-1,\frac{3}{2},0,8\right).$

221. $A(x)=-5x^4-3x^2-2x+3, \quad (z=-2,0,3).$

222. $A(x)=-5x^3+2x^2+6x^4-2, \quad (z=1,-2,0.75).$

223. In quali casi dell'es. precedente, il polinomio è divisibile per $x-z$?

224. $A(x)=5x^4-2x^3-5x+3, \quad (z=3,2,1).$

225. $A(x)=7x^3-3x^2+\frac{2}{5}x+1, \quad \left(z=0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right).$

226. $A(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}, \quad \left(z=\frac{1}{5},2,0.1\right).$

Rispondere alle seguenti domande e completare ove occorre.

227. Dividendo un polinomio per un binomio si ottiene ancora un ....

228. Come si stabilisce il grado del *polinomio quoziente* ?

229. Se il polinomio resto, che si ottiene dividendo un polinomio per un binomio, è il *polinomio nullo,* cosa si può concludere ?

230. Dalla divisione di un polinomio $A(x)$ e un binomio $(x - z)$, si ottiene

231. $A(x)=(x-z)Q(x)+R(x)$

ove $Q(x)$ rappresenta il polinomio quoziente e $R(x)$ il polinomio resto, se $R(z) = 0$ cosa si può concludere riguardo al valore z ?

7.6. Divisione di due polinomi

232. $\left(4x^4+x^3-4x^2+6x-3\right):\left(x^2+x-1\right).$ $\left[Q(x)=4x^2-3x+3\right]$

233. $\left(14x^3+15x^2+10x+3\right):(2x+1).$ $\left[Q(x)=7x^2+4x+3\right]$

234. $\left(24y^3-23y^2-52y-15\right):\left(3y^2-4y-5\right).$ $\left[Q(y)=8y+3\right]$

235. $\left(m^3-15.26m^2+9.9m-1.56\right):(5m-1.3).$ $\left[Q(m)=\frac{1}{5}m^2-3m+\frac{6}{5}\right]$

236. $\left(-m^4+7m^2n^2-n^4-mn^3\right):(-2m+n).$

237. $\left(2x^4-3x^3-4x^2+3x+2\right):[(x-1)(2x+1)].$ $\left[Q(x)=x^2-x-2\right]$

238. $\left(x^3-ax^2+ax-a\right):(x-a+1).$ $\left[Q(x)=x^2-x+1\right]$

239. $\left(4x^4+7x^3-6x^2+x\right):(x-0.25).$ $\left[Q(x)=4x^3+8x^2-4x\right]$

240. $\left(3x^5-4x^4-6x^3+8x^2+3x+3\right):\left(x^2-3\right).$ $\left[Q(x)=3x^3-4x^2+3x-4\right]$

241. $\left(\frac{3}{8}x^5-2x^4-\frac{7}{4}x^3+\frac{53}{4}x^2-7x+1\right):\left(\frac{3}{4}x^2-4x+1\right).$

242. $\left(2x^8-\frac{43}{20}x^6+2x^4+4x^2\right):\left(\frac{4}{5}x^5-\frac{3}{2}x^3+2x\right).$ $\left[Q(x)=\frac{5}{2}x^3+2x\right]$

243. $\left(9x^4y^4-53x^3y^3+\frac{2}{3}x^2y^2+60xy-2\right):\left(\frac{3}{5}x^3y^3-\frac{2}{3}x^2y^2+2\right).$

244. $\left(2x^6-x^5+x^4+8x^3-8x^2-x+13\right):\left(2x^3-x^2-3x+4\right).$
$\left[Q(x)=x^3+2x+3\right]$

245. $\left(36x^3-35x^2+22x-12\right):\left(9x^2-2x+4\right)$. $[Q(x)=4x-3]$

246. $\left(49x^7-42x^5+26x^3+2x^2+4\right):\left(7x^4-5x^2+3\right)$. $\left[Q(x)=7x^3-x\right]$

247. $\left(3x^4-13x^3+20x^2-19x+5\right):\left(3x^2-4x+5\right)$. $\left[Q(x)=x^2-3x+1\right]$

248. $\left(15x^7-22x^6+x^5-5x^4+4x^3-3x^2+1\right):\left(3x^3-5x^2+1\right)$.
$\left[Q(x)=5x^4+x^3+2x^2+1\right]$

249. $\left(4x^5+3x^4+12x^3+11x^2+6\right):\left(x^2+3\right)$. $\left[Q(x)=4x^3+3x^2+2\right]$

250. $\left(16x^8-\frac{8}{3}x^7+\frac{8}{3}x^6+\frac{8}{9}x^5+\frac{16}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{9}x\right):\left(4x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x\right)$.
$\left[Q(x)=4x^4+\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}\right]$

251. $\left(x^7+(a+3)x^5+x^4+4ax^3+ax^2+3ax+a\right):\left(x^3+3x+1\right)$.
$\left[Q(x)=x^4+ax^2+a\right]$

252. $\left(\frac{1}{15}m^5+\frac{1}{3}m^4-\frac{13}{15}m^3-\frac{147}{25}m^2-\frac{27}{5}m+\frac{3}{5}\right):\left(\frac{1}{3}m^3-6m+\frac{3}{5}\right)$.
$\left[Q(x)=\frac{1}{5}m^2+m+1\right]$

253. $\left(\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{24}x^4y^2+4x^3+\frac{17}{72}x^3y^2+\frac{2}{3}x^2y^2+\frac{4}{3}x^4+xy^2\right):\left(4x^2+\frac{1}{3}xy^2+y^2\right)$.
$\left[Q(x)=\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{3}x^2+x\right]$

254. $\left(\frac{49}{12}x^7-\frac{7}{2}x^5+\frac{13}{6}x^3-\frac{1}{4}x\right):\left(\frac{7}{3}x^3-\frac{1}{3}x\right)$. $\left[Q(x)=\frac{7}{4}x^4-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{4}\right]$

Rispondere alle seguenti domande e completare ove occorre:

255. Il *grado* del *polinomio resto* rispetto a quello del polinomio divisore è ....

256. Dati i polinomi quoziente e resto si può risalire al *grado del polinomio dividendo* ?

257. Se il polinomio dividendo è *incompleto* e il polinomio divisore è *completo* si può effettuare ugualmente la divisione ?

7.7. Fattorizzazione di un polinomio

Fattorizzare i seguenti polinomi mediante il criterio del raccoglimento a fattore comune:

258. $x^2y - x^2z + 2x^2$; $\quad 5x - 10x^2$. $\qquad [x^2(y - z + 2);\ 5x(1 - 2x)]$

259. $x^2 + 4xy + 3x^3$; $\quad 3x^4 - x^3$. $\qquad [x(x + 4y + 3x^2);\ x^3(3x - 1)]$

260. $4x^2 - 8x - 4$; $\quad 2m^2n + 4mn^2$. $\qquad [4(x(x - 2) - 1);\ 2\text{mn}(m + 2n)]$

261. $3a^2b^2 - 6a^3b^2 + 9a^2b^3$. $\qquad [3a^2b^2(1 - 2a + 3b)]$

262. $a^3bc^2 + a^2b^2c^2 - ab^2c^3$. $\qquad [abc^2(a^2 + ab - bc)]$

263. $30a^3b^3c^2d^4x^3 - 15a^4b^2cd^5y^3$. $\qquad [15a^3b^2cd^4(2bcx^3 - ady^3)]$

264. $6x^6 - 24x^4 + 30x^3 + 6x^2$. $\qquad [6x^2(x^4 - 4x^2 + 5x + 1)]$

265. $4x^3y - 2x^2y^2 + 7xy^3$. $\qquad [xy(4x^2 - 2xy + 7y^2)]$

266. $\frac{3}{2}a^4bc + \frac{9}{2}ab^4c + \frac{27}{4}abc^4$. $\qquad \left[\frac{3}{4}abc(2a^3 + 6b^3 + 9c^3)\right]$

267. $\frac{1}{21}x^6y^6 + \frac{1}{14}x^3y^3 + \frac{1}{7}x^2y^2$. $\qquad \left[\frac{1}{7}x^2y^2\left[xy\left(\frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{2}\right) + 1\right]\right]$

268. $a(x+1) + b(x+1)$; $\quad xy(a+b) + (a+b)$. $\qquad [(x+1)(a+b);\ (a+b)(xy+1)]$

269. $(x - y)^3 - (x - y)^2$. $\qquad [(x - y)^2(x - y - 1)]$

270. $a(x + y)^3 + b(x + y)^2 + c(x + y)$. $\qquad [(x + y)\{(x + y)[a(x + y) + b] + c\}]$

271. $x^2(2x + 1) + 3x(2x + 1) + x^3(2x + 1)$. $\qquad [x(2x + 1)[x(x + 1) + 3]]$

272. $(3a - b)(2a + b) - (5a - 1)(2a + b) + (3a + b)(2a + b)$. $\qquad [(2a + b)(a + 1)]$

273. $(m + 1)^2(m - n) + (m + 1)^3(m - n)^2 + (m + 1)^4(m - n)$.
$\qquad [(m + 1)^2(m - n)[1 + (m + 1)(2m - n + 1)]]$

274. $(2a + z) + (a + 1)^2 + 3(a + 1)$. $\qquad [(2a + z) + (a + 1)(a + 4)]$

275. $x(a + b + c) + y(a + b + c) + 2(x + y)^2$. $\qquad [(x + y)[(a + b + c) + 2(x + y)]]$

276. $3ab(x+y)^2+9a^2b^2(x+y)^2+1+3ab.$ $\left[(1+3ab)\left[3ab(x+y)^2+1\right]\right]$

277. $4a(x+y)^2+2b\left(x^2+2xy+y^2\right)+(x+y)^2.$ $\left[(x+y)^2(4a+2b+1)\right]$

278. $m^3-m^2+2m(m-1)^2+3m^2(m-1).$ $[2m(m-1)(3m-1)]$

279. $4ab^2(x-5)^2-a^2b(x-5)^3+3ab(x-5).$
$[ab(x-5)[(x-5)(4a-a(x-5))+3]]$

280. $(x+y)^2-x^2-xy+x+y^3+xy^2+y.$ $\left[(x+y)\left(1+y+y^2\right)\right]$

281. $a^2-a^2b+2x-2bx+(1-b).$ $\left[(1-b)\left(a^2+2x+1\right)\right]$

282. $(m+n)^3-m(m+n)^2-n^2(m+n).$ $[mn(m+n)]$

283. $x^3y^2-xy+3x^4y-3x^2.$ $\left[x\left(x^2y-1\right)(y+3x)\right]$

284. $a^2x+b^2x+ayx^2-byx^2.$ $\left[x\left[\left(a^2+b^2\right)+y(a-b)x\right]\right]$

285. $(x-y)^2+3x^2-2xy.$ $\left[(2x-y)^2\right]$

286. $\frac{4}{3}a^2bc+\frac{4}{3}b^3c+3bc^3+\frac{8}{3}ab^2c-4abc^2-4b^2c^2.$ $\left[\frac{1}{3}bc(2a+2b-3c)^2\right]$

287. $5m^2-10mn+(2m-4n)+\left(m^2-5mn\right)-2m(m-5n).$
$[(5m+2)(m-2n)-m(m-5n)]$

288. $a(a+b)^2-ab(a+b)+4b(a+b)^2.$ $\left[(a+b)(a+2b)^2\right]$

289. $a(m+n)^2-b(m+n)+(a+b)(m+n).$ $[a(m+n)(m+n+1)]$

290. $(2a+3b)^2-2(2a+3b)(a+b)+2a^2-3b^2.$ $[2a(a+b)]$

291. $m^3-2m^2n+2n^2+4n+mn^2.$ $\left[m(m-n)^2+2n(n+2)\right]$

292. $a^3(x+y)+a\left(a^2+b^2\right)+ab^2(x+y).$ $\left[a\left(a^2+b^2\right)(x+y+1)\right]$

293. $6x^3-11x^2y-12xy^2+22y^3.$ $\left[(6x-11y)\left(x^2-2y^2\right)\right]$

294. $a^7-a^4b^2-4a^3b^2+4b^4.$ $\left[\left(a^3-b^2\right)\left(a^4-4b^2\right)\right]$

295. $4m^4n^2+8m^2n^2-16m^3n^3-2m^3n.$ $\left[2m^2n(m-4n)(2mn-1)\right]$

296. $6a^3x-6a^3y+2a^2bx-2a^2by-4a^2cx+4a^2cy$.

$\left[2a^2(x-y)(3a+b-2c)\right]$

297. $-3a^2yx^4-3a^2yx^3-6a^2yx^2+3abyx^4+3abyx^3+6abyx^2$.

$\left[-3ayx^2(a-b)\left(x^2+x+2\right)\right]$

298. $3b^2x^4y^4+3b^2x^3y^5-3b^2xy^5+2x^3y^5-2xy^5$.

$\left[xy^4\left(3b^2+2\right)\left(x^3+x^2y-y\right)\right]$

Fattorizzare i seguenti polinomi utilizzando le identità notevoli:

299. $4a^2-9b^2;\quad x^2-36;\quad x^2-9;\quad 9-64x^2$.

300. $81a^4-16b^4;\quad 1-4x^2y^2;\quad a^2-\dfrac{9}{4}$.

301. $\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{9}b^2;\quad 4x^2-(x-y)^2;\quad 1-(2a+b)^2$.

302. $(2a-b)^2-(2a+b)^2;\quad (x-2y+2)^2-(x-y-1)^2$.

303. $a^2+b^2+2ab;\quad x^2+4y^2-4xy$.

304. $y^4+16-8y^2;\quad (x-2y)^2+2(x-2y)(x+2y)+(x+2y)^2$.

305. $x^2+y^2+1-2xy+2x-2y$. $\left[(x-y+1)^2\right]$

306. $a^2+4b^2+9+4ab+6a+12b$. $\left[(a+2b+3)^2\right]$

307. $\dfrac{1}{4}a^2+b^2+4-ab-2a+4b$. $\left[\left(\dfrac{1}{2}a-b-2\right)^2\right]$

308. $x^2+2xy+y^2-1;\quad 4-4x^2-y^2-4xy$.

$[[(x+y)-1][(x+y)+1];\ [2-(2x+y)][2+(2x+y)]]$

309. $a^3-(a+2b)^3$. $\left[(-2b)\left[a^2+a(a+2b)+(a+2b)^2\right]\right]$

310. $8a^3+12a^2+6a+1;\quad x^3+\dfrac{1}{27}y^3+x^2y+\dfrac{1}{3}xy^2$.

$\left[(2a+1)^3;\ \left(x+\dfrac{1}{3}y\right)^3\right]$

311. $(x+y)^3+3(x+y)^2(x-2y)+3(x+y)(x-2y)^2+(x-2y)^3$.

$\left[(2x-y)^3\right]$

312. a^3-1; a^3+8; a^3+b^3.

$\left[(a-1)\left(a^2+a+1\right);(a+2)\left(a^2-2a+4\right);(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\right]$

313. $\frac{1}{8}-64a^3b^6$; $\frac{3}{8}+81x^3$.

$\left[\left(\frac{1}{2}-4ab^2\right)\left(\frac{1}{4}+2ab^2+16a^2b^4\right);\ 3\left(\frac{1}{2}+3x\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x+9x^2\right)\right]$

314. $4-a^2-b^2-2ab$; $4x^2+y^2-a^2-b^2-2ab-4xy$.

$[[2-(a+b)][2+(a+b)];\ [(2x-y)-(a+b)][(2x-y)+(a+b)]]$

315. $(x-2y)^3-(x+3y)^3$. $\left[(-5y)(x-2y)^2+(x-2y)(x+3y)+(x+3y)^2\right]$

316. $x^3-3x^2+3x-1-y^3$; $8a^3-12a^2+6a-1+b^3$.

$\left[(x-y-1)\left[(x-1)^2+y(x-1)+y^2\right];\ (2a-1+b)\left[(2a-1)^2-b(2a-1)+b^2\right]\right]$

317. $x^2-7x+10$; x^2-6x+8; x^2+6x+8 .

$[(x-5)(x-2);\ (x-2)(x-4);\ (x+2)(x+4)]$

318. x^4-5x^2+4; a^2+a-12; $a^2-15a+56$.

$[(x-2)(x+2)(x-1)(x+1);\ (a-3)(a+4);\ (a-7)(a-8)]$

319. $x^2-3ax+2a^2$; $x^2+(a+b)x+ab$.

$[(x-2a)(x-a);\ (x+a)(x+b)]$

320. $x^2+9xy+8y^2$; $x^2+(2a+3b)x+6ab$.

$[(y+x)(8y+x);\ (x+2a)(x+3b)]$

321. x^4-x^2; $2x^8-18x^2$. $\left[x^2(x-1)(x+1);\ 2x^2\left(x^3+3\right)\left(x^3-3\right)\right]$

322. $2ab\left(x^2-4\right)+2a\left(x^2-3x+2\right)-6ab(x-2)$; $4m^4-n^2m^2-16m^2+4n^2$.

$[2a(x-2)(x-1)(b+1);\ (2m-n)(2m+n)(m-2)(m+2)]$

323. $x^2-2ax-2x+2a+a^2+1$; $4\left(x^3+2\right)-3x(x-1)^2+15x$.

$\left[(x-a-1)^2;\ (x+2)^3\right]$

324. $a(x-y)^2-bx^3+by^3+3bx^2y-3bxy^2$. $\left[(x-y)^2(a-bx+by)\right]$

325. $12a^2bx^2+300a^2b-120a^2bx-3b^3x^2-75b^3+30b^3x$.

$$\left[3b(2a+b)(2a-b)(x-5)^2\right]$$

326. $5x^5y-20x^4y+15x^3y-5x^3y^3+20x^2y^3-15y^3x.$

$$[5xy(x-y)(x+y)(x-3)(x-1)]$$

327. $\dfrac{4}{3}a^5b-3a^3b^3-\dfrac{4}{3}a^4b^2+3a^2b^4.$ $\left[\dfrac{1}{3}a^2b(2a-3b)(2a+3b)(a-b)\right]$

328. $-40a^7x^2+60a^5x^3-30a^3x^4+5ax^5;\quad 9x^7-3x^6-11x^5+3x^4+2x^3.$

$$\left[-5ax^2\left(2a^2-x\right)^3;\ 9x^3(x-1)(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]$$

329. $-20m^4n^2x^4+5y^2m^4n^2+20m^2n^4x^4-5m^2n^4y^2.$

$$\left[-5m^2n^2(m-n)(m+n)\left(2x^2-y\right)\left(2x^2+y\right)\right]$$

330. $-8m^5x^4+4m^4nx^4-2m^3n^2x^4+72m^5y^2-36m^4ny^2+18m^3n^2y^2.$

$$\left[-2m^3\left(x^2+3y\right)\left(x^2-3y\right)\left(4m^2-2mn+n^2\right)\right]$$

331. $a^3x^3-b^3x^3-5a^3yx^2+7a^3y^2x-7b^3y^2x-3a^3y^3-3b^3y^3.$

$$\left[(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)(x-y)^2(x-3y)\right]$$

332. $a^3x^3+b^3x^3-3a^3y^2x^2-3b^3y^2x^2-16a^3y^4x-16b^3y^4x+48a^3y^6+48b^3y^6.$

$$\left[(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\left(x-4y^2\right)\left(x+4y^2\right)\left(x-3y^2\right)\right]$$

333. $27m^5+27n^2m^3-8n^3m^2-8n^5;\quad -3m^3n-3mn^3+27p^2mn-6m^2n^2.$

$$\left[(3m-2n)\left(9m^2+6mn+4n^2\right)\left(m^2+n^2\right);\ -3mn(m+n-3p)(m+n+3p)\right]$$

334. $-\dfrac{3}{4}m^7n^5-108m^3n^9+\dfrac{75}{4}m^5n^7.$

$$\left[-\frac{3}{4}m^3n^5(m-3n)(m-4n)\left(m^2+7nm+12n^2\right)\right]$$

335. $a^8x^2-16b^4x^2-6a^8xy+96b^4xy+9a^8y^2-144b^2y^2.$

$$\left[\left(a^2-2b\right)\left(a^2+2b\right)\left(a^4+4b^2\right)(x-3y)^2\right]$$

336. $-7m^3p^3-\dfrac{7}{4}mp^5-7m^2p^4+\dfrac{7}{9}mp^3n^2;\quad ax^2-(5-a)ax-5a^2.$

$$\left[-7mp^3\left(m+\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}n\right)\left(m+\frac{1}{2}p-\frac{1}{3}n\right);\ a(x-5)(x+a)\right]$$

337. $4a^3-4a^2b-9ab^2-a-6ab+9b^3+b+6b^2.$

$$[(a-b)(2a-3b-1)(2a+3b+1)]$$

338. $x^2+4y^2-4xy-a^2-9b^2-6ab.$ $\qquad [(x-2y-a-3b)(x-2y+a+3b)]$

339. $(x^4+(a-2b)x^3-2abx^2)(x^2-4b^2).$ $\qquad [x^2(x-2b)^2(x+2b)(x+a)]$

Fattorizzare i seguenti polinomi, mediante divisione per un binomio:

340. $a^3-6a^2+11a-6;\quad 2x^2+7x+6.$ $\qquad [(a-2)(a^2-4a+3);\ (x+2)(2x+3)]$

341. $4x^3+x^2-2x+1;\quad 2m^3-9m^2+2m+8.$
$[(x+1)(4x^2-3x+1);\ (m-4)(2m^2-m-2)]$

342. $m^4-5m^2+m+2;\quad 2x^3+3x^2-2x-3.$
$[(a-2)(a^3+3a^2-4);\ (x-1)(2x^2+5x+3)]$

343. $a^3-2a^2-a+2;\quad a^4+3a^3-a-3.$
$[(a-2)(a^2-1);\ (a-1)(a^3+4a^2+4a+3)]$

344. $x^3-\frac{4}{3}x^2+2x-\frac{5}{3};\quad 3x^3-2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{18}.$
$\left[(x-1)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\right);\ \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(3x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right]$

345. $5x^3-6x^2+4x-93;\quad -3x^4+30x-27.$
$[(x-3)(5x^2+9x+31);\ (x-1)(-3x^3-3x^2-3x+27)]$

346. $x^4+x^3+x^2+2x+1;\quad x^3-2x^2+5x-4.$
$[(x+1)(x^3+x+1);\ (x-1)(x^2-x+4)]$

347. $2x^4-5x^3+2x^2-20x+40;\quad 2x^3+3x^2-2x-3.$
$[(x-2)(2x^3-x^2-20);\ (x-1)(x+1)(2x+3)]$

348. $7x^5+8x^2-1;\quad 2x^3-5x^2+4x-1.$
$[(x+1)(7x^4-7x^3+7x^2+x-1);\ (x-1)(x-1)(2x-1)]$

349. $3x^3+5x^2+x-1;\quad 8x^3-8x^2+6x-2.$
$\left[(x+1)(x+1)(3x-1);\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2-4x+4)\right]$

350. $x^4-3x^2+5x+6;\quad x^4-2x^3-4x^2+9.$
$[(x+2)(x^3-2x^2+x+3);\ (x-3)(x^3+x^2-x-3)]$

Fattorizzare i seguenti polinomi:

351. $x^2+10x+25;\ \ 16x^2+8xy+y^2;\ \ 3x^2y+6xy+3y^2$.

352. $x^2+4xy+4y^2-a^2+6a-9;\quad x^4y-x^2y^3$.

353. $a^4-8a^2b^2+16b^4;\quad a^6-1.$ $\left[\left(a^2-4b^2\right)^2;\ (a-1)\left(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1\right)\right]$

354. $4a(x+y)^2+2b\left(x^2+2xy+y^2\right)+x^2+2xy+y^2$.

$\left[(x+y)^2(4a+2b+1)\right]$

355. $80a^2b+40a^3b^2+5a^4b^3;\quad 2a^7-16a^5+32a^3$.

$\left[5a^2b(4+ab)^2;\ 2a^3\left(a^2-4\right)^2\right]$

356. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{16}a^4$. $\left[\frac{1}{2}a\left\{1+\frac{1}{2}a\left[1+\frac{1}{2}a\left(-1+\frac{1}{2}a\right)\right]\right\}\right]$

357. $2ax^3-16a-12ax^2+24ax$. $\left[2a(x-2)^3\right]$

358. $3(a-b)^2-12c^2;\quad 25(x-y)^2-16(x+y)^2$.

$\left[3[(a-b-2c)(a-b+2c)];\ (x-9y)(9x-y)\right]$

359. $9a^2-36b^2+16c^2-24ac;\quad 0.16x^2y^2-0.25$.

$\left[[(3a-4c)-6b][(3a-4c)+6b];\ (0.4xy-0.5)(0.4xy+0.5)\right]$

360. $x^4+4x^3-21x^2;\quad 4ab-3ac-8bd+6dc$.

$\left[x^2(x-3)(x+7);\ (2d-a)(3c-4b)\right]$

361. $a^3-b^3+a\left(a^2-b^2\right)+b(a-b)$. $\left[(a-b)\left(2a^2+b^2+2ab+b\right)\right]$

362. $m(m-2n)(m-n)-2n(m+2n)(m-n)$. $\left[(m-n)\left(m^2-4n^2-4mn\right)\right]$

363. $a^5-1;\quad x^7-y^7;\quad (x+4y)^2+2(x+4y)(x-y)+(x-y)^2$.

$\left[(a-1)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right);\ [(x+4y)+(x-y)]^2\right]$

364. $m^6+16m^3+64;\quad x^3+6-x$.

$\left[\left[(m+2)\left(m^2-2m+4\right)\right]^2;\ (x+2)\left(x^2-2x+3\right)\right]$

365. $x^2-3x+2+x(x-1);\quad a^2+ab+b^2-a^3+b^3$.

$\left[2(x-1)^2;\ \left(a^2+ab+b^2\right)(1-a+b)\right]$

366. $0.25a^2+0.04-0.2a;\quad (7-x)^2-14+2x$.

$\left[(0.5a-0.2)^2;\ (x-5)(x-7)\right]$

367. $x^5+2x^4-x-2;\quad x^2-3x+2+a(x-2)$.
$\left[(x+2)(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right);\ (x-2)(x-1+a)\right]$

368. $a^2-ab-20b^2;\quad a^2-2a+1-(a+b)^2$.
$\left[\left(1+4\frac{b}{a}\right)\left(a^2-5ab\right);\ (-1-b)(2a+b-1)\right]$

369. $a^4-2a^2+1;\quad y^2-1+(y-1)^2$. $\left[\left(a^2-1\right)^2;\ 2y(y-1)\right]$

370. $x^3-8+3x^2+6x+12;\quad x^3-1+ax-a$.
$\left[\left(x^2+2x+4\right)(x+1);\ (x-1)\left(x^2+x+1+a\right)\right]$

371. $(ab-1)^2-(2ab+1)^2$. $[-2ab(ab+1)]$

372. $z^2+(a+2b)z+2ab;\quad y^2+(a-5b)y-5ab$.
$[(z+a)(z+2b);\ (y+a)(y-5b)]$

373. $y^4+3y^2+4;\quad y^2-(a+b)y+ab$.
$\left[\left(y^2-y+2\right)\left(y^2+y+2\right);\ (y-a)(y-b)\right]$

374. $z^2+(a+2b)z+2ab$. $[(z+a)(z+2b)]$

Scomporre in fattori i seguenti polinomi:

375. $18a^4-8a^2b^2+b^4$.

376. $8x^3z^3+24x^2z^3+24xz^3+8z^3$.

377. $a^4bc^4-2a^4bc^2+a^4b$.

378. $x^4y^2-2x^2y+1-y^2$.

379. $b^8-2b^4+1;\quad x^4-5x+4$.

380. $x^5+x^4-4x^3-4x^2;\quad x^2-5bx+6b^2$.

381. $a^6-1-3a^4+3a^2;\quad ax^2+a^2x-6a^3$.

382. $a^4-2a^2b^2x^2+b^4x^4;\quad x^6-9x^3+8$.

383. $a^2b^2c-c^3+a^2b^2d^2-c^2d^2;\quad x^4-5a^2x^2-4a^4$.

384. $3a^2b-3bc^2+3ab-3bc; \quad x^2+3ax+2a^2.$

385. $18a^4b^2c^6x-2d^2x^3; \quad x^2+x-20.$

386. $x^{3a+2}-2x^{a+2}y^a+x^{2a}y^{a+3}-2y^{2a+3}.$ $\quad\left[\left(x^{a+2}+y^{a+3}\right)\left(x^{2a}-2y^a\right)\right]$

387. $a^{m+3n}+a^{m+n}b^{m+n}-a^{2n}b^{2m}-b^{3m+n}.$ $\quad\left[\left(a^{2n}+b^{m+n}\right)\left(a^{m+n}-b^{2m}\right)\right]$

388. $x^{3b+1}-x^{2b+1}y^{2b}+2x^by^{3b}-2y^{5b}.$ $\quad\left[\left(x^{2b+1}+2y^{3b}\right)\left(x^b-y^{3b}\right)\right]$

389. $a^{3x}+a^{2x}b^y+a^{2x}b^2-a^xb^y-b^{2y}-b^{y+2}.$ $\quad\left[\left(a^{2x}-b^y\right)\left(a^x+b^y+b^2\right)\right]$

Rispondere alle seguenti domande e completare ove occorre:

390. Spiegare con parole proprie le seguenti espressioni:
   a. *Raccoglimento a fattore comune parziale* ;
   b. *Raccoglimento a fattore comune totale*.

391. La *differenza di due quadrati* è uguale al prodotto .... per la loro ....

392. Gli eventuali zeri di un polinomio sono *divisori* del termine di grado .... del polinomio stesso.

393. Dato il seguente trinomio di secondo grado

$$x^2+ax+b$$

tale che $a = m + n$ e $b = mn$, come si scompone il trinomio?

7.8. Minimo comune multiplo e massimo comune divisore di un insieme di polinomi

Dopo aver scomposto in fattori i seguenti polinomi, se ne determini M.C.D. e m.c.m.

394. $a^2-9; \quad a^2-6a+9; \quad 2a^2-6a.$

395. $4x(x+y); \quad 6x\left(x^2-y^2\right); \quad 2xy\left(x^3+y^3\right).$

396. $x^4-xy^3; \quad x^2y-xy^2; \quad x^3+x^2y+xy^2.$

397. $2-2x; \quad x^3+x^2+x; \quad x^2-x; \quad x^4-x.$

398. $2x^2y^2-2xy^2$; $xy(x+y)$; $8x^3y$; $2xy$.

399. $a^2b^2-4c^2$; $a^2b^2+4c^2-4abc$; $3a^2b-6ac$.

400. $x^2-4xy+3y^2$; $x^2-6xy+9y^2$; x^3+27y^3.

401. $(4x^2-4)(2x+2)^2$; $(3-3x^2)(5x+5)$; $5-5x$.

402. x^2-2x+1; x^2-x-2; x^2-x.

403. $3a^3-2a^2+3a-2$; $9a^2-4$; $3a^2+a-2$.

404. $(2a-2b)^2$; $(4b-4a)^2$; $16(b^2-a^2)$.

405. $2ax-2a$; $3bx-3b$; $6(ax-x)(x-1)$.

406. xy^2+xy; $x(y+1)^2$; x^2+x.

407. $(a+b)^2$; $(a-b)$; a^2-b^2.

408. $1-x^2$; $2-2x$; $x-1$.

409. $a^2-9a+20$; $a^2-8a+16$; $a^2-7a+12$.

410. x^6-32x; x^2-2x; x^3-5x^2+6x.

411. $x^2-24x+144$; $x^2-13x+12$; $x^3-11x^2-11x-12$.

412. $8a(3a-3ab)^2$; $4a^2b(1-2b+b^2)^2$; $a^3(4b-4)^2$.

413. $(a^2-3a+2)^2$; $(a^2-2a+1)(a-2)$; $(a^2-4a+4)(a-1)$.

414. $5x^3y-5x^2y^2$; $15x^3(y-x)^2$; $10yx^4-10x^2y^3$.

415. $y^9x^2-y^9$; xy^3-y^3; $(x-1)^2y$.

416. a^6-b^6; $(a-b)$; $10ax^2-10bx^2$.

417. x^3-1; $4x^3-12x^2+12x-4$; $4xy^3-4y^3$.

418. $\frac{1}{16}x^4-y^4$; $\frac{1}{4}xyz^2-\frac{1}{2}y^2z^2$; $xa^2+b^2x-2abx-y^2a^2-yb^2+2yab$.

419. a^3-27b^3; $(a-b)^2(x^6-y^6)$; $16a^2-16b^2$.

420. a^2+9-6a; $a^2-8a+15$; $(a-3)(a^3-3a^2+6a-4)$.

421. $4x^2+2xy+\frac{1}{4}y^2$; $12x^3-8x^2y-3xy+2y^2$; $4x^3-xy$.

Completare le seguenti affermazioni:

422. Dati due o più polinomi, scomposti in fattori, si definisce .... il prodotto dei fattori comuni, ciascuno preso col *minore esponente.*

423. Dati due o più polinomi, scomposti in fattori, si definisce .... il prodotto dei fattori comuni e non comuni, ciascuno con il *maggiore esponente.*

424. Date due o più espressioni, l'espressione di minor grado che sia *multipla* di tutte le altre si dice ....

425. Se due o più polinomi sono stati decomposti in fattori, l'espressione di maggior grado che li divide si dice ....

7.9. Espressioni razionali

Applicando la legge di cancellazione delle frazioni, semplificare le seguenti frazioni:

426. $\frac{x^2y}{xy^3}$; $\frac{a^2bc^2}{ab^2c}$; $\frac{xy^4}{x^2y^2z^2}$; $\frac{c^2d^5}{bcd}$; $\frac{4x-4y}{x^2-y^2}$.

$$\left[\frac{x}{y^2};\ \frac{ac}{b};\ \frac{y^2}{xz^2};\ \frac{cd^4}{b};\ \frac{4}{(x+y)}\right]$$

427. $\frac{x^3-x^2}{x-1}$; $\frac{5xy-10xy^2}{1-4y^2}$; $\frac{1+4b+4b^2}{3a+6ab}$; $\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$.

$$\left[x^2;\ \frac{5xy}{(1+2y)};\ \frac{1+2b}{3a};\ \frac{(x+1)}{(2x+1)}\right]$$

428. $\frac{x^4-1}{x^6-1}$; $\frac{x^3y-2x^2y^2}{2x^3y+x^2y^2}$; $\frac{4m^2n^2-12mn^3}{4m^3n-12m^2n^2}$.

$$\left[\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1};\ \frac{(x-2y)}{(2x+y)};\ \frac{n}{m}\right]$$

429. $\dfrac{x^4-x^3}{x^2-2x+1}$; $\dfrac{z^3-z}{z^4-2z^3+z^2}$; $\dfrac{4m-4n}{m^2-2mn+n^2}$.

$$\left[\frac{x^3}{x-1};\ \frac{z+1}{z-1};\ \frac{4}{m-n}\right]$$

430. $\dfrac{8c^3-12c^2m+6cm^2-m^3}{4c^3-4c^2m+cm^2}$; $\dfrac{x^2-xy}{xz-xt-yz+yt}$. $\left[c(2c-m);\ \dfrac{x}{z-t}\right]$

431. $\dfrac{3ab^2}{3ab^2-6a^2b^2}$; $\dfrac{14x^2-7xz}{10xy-5zy}$. $\left[\dfrac{1}{1-2a};\ \dfrac{7x}{5y}\right]$

432. $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; $\dfrac{ab-ay-bx+xy}{a^2-2ax+x^2}$. $\left[\dfrac{x+2}{x-1};\ \dfrac{b-y}{a-x}\right]$

433. $\dfrac{2x^2-18x+36}{9-x^2}$; $\dfrac{x^6-y^6}{(x^2+y^2)^2-(xy)^2}$. $\left[\dfrac{2(6-x)}{3+x};\ x^2-y^2\right]$

434. $\dfrac{8-a^3+2a(2-a)}{16+a^4-8a^2}$; $\dfrac{-20a^2+ax+x^2}{-16a^2+x^2}$. $\left[2-a;\ \dfrac{x+5a}{x+4a}\right]$

435. $\dfrac{a^7b^2-a^3b^4}{a^5b^6+2a^3b^5+ab^6}$; $\dfrac{8-a^3b^3}{4+a^2b^2-2ab}$.

436. $\dfrac{2^4a^3b^2c-2^5a^4bc^3}{16ba^2-32a^2c^2}$; $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{b^2-a^2}$. $\left[abc;\ \dfrac{(a-b)}{(a+b)}\right]$

437. $\dfrac{(3x-3y)^2}{(3x+3y)(3y-3x)}$; $\dfrac{5a^2\left(a^4-b^4\right)}{15\left(ab^2-a^3\right)}$. $\left[-\dfrac{(x-y)}{(x+y)};\ -\dfrac{1}{3}\left(a^2+b^2\right)\right]$

438. $\dfrac{ab-3a^2}{ab}$; $\dfrac{14xy^2-7x^2y}{21x^2y^2}$. $\left[\dfrac{a(b-3a)}{b};\ \dfrac{(2y-x)}{3xy}\right]$

439. $\dfrac{(a-b)^2+a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$; $\dfrac{x^5-32}{xy-2y}$. $\left[\dfrac{2a}{(a-b)};\ \dfrac{\left(x^4+2x^3+4x^2+8x+16\right)}{y}\right]$

440. $\dfrac{ab-b+a^2-1}{ax-x}$; $\dfrac{a^2-b^2+a+b}{ax-bx+x}$. $\left[\dfrac{b+a+1}{x};\ \dfrac{(a+b)}{x}\right]$

441. $\dfrac{x^2-a^2+2ab+b^2}{(x-a+b)^2}$; $\dfrac{1-a-b+a^2b}{1-a^2}$. $\left[\dfrac{(x+a-b)}{(x-a+b)};\ \dfrac{1-b(a+1)}{(1+a)}\right]$

442. $\dfrac{x^3+3x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}}{x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}}$; $\dfrac{a^3-2a^2x^2b-2ax^2-4x^4b}{a^4-4x^4}$.

443. $\dfrac{3x^2y^2-4x^2-3xy^2+4xy}{x^2-y^2}$; $\dfrac{x^7-1}{x^{15}-1}$.

444. $\dfrac{a^3-ca^2+ba^2-ab^2+cb^2}{a^2+b^2-2ab+ac-bc}$; $\dfrac{a^3-8}{a^2-a-6}$.

445. $\dfrac{4x^3+3x^2+3x-1}{4x^2-5x+1}$; $\dfrac{45x^3-51x^2y+8xy^2-4y^3}{3x+2y+9x^2-4y^2}$.

446. $\dfrac{a^2x^3+abx^2+b^3x+a^3x^2+a^2bx+ab^3}{a^3x^3-b^3}$; $\dfrac{x+a+b}{x^2-a^2-b^2-2ab}$.

447. $\dfrac{x^4-y^4}{a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2y^3+b^2x^4y}$.

$$\left[\frac{(x-y)(x+y)}{a^2+b^2x^2y}\right]$$

448. $\dfrac{6x^3-17x^2+11x-2}{3x^3-13x^2+16x-4}$; $\dfrac{4x^4-12x^3+5x^2+12x-9}{4x^2-12x+9}$.

449. $\dfrac{9a^4-36a^3+35a^2+4a-4}{(9a^2-1)(3a-6)}$; $\dfrac{ax-ax^6}{a^2x^3-a^2}$.

$$\left[\frac{a-2}{3};\ \frac{-x(x^4+x^3+x^2+x+1)}{a(x^2+x+1)}\right]$$

450. $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9}$; $\dfrac{a^2x^2-c^2y^2}{a^2x^2+c^2y^2-2acxy}$.

$$\left[\frac{(x-1)(x-2)}{x-3};\ \frac{ax+cy}{ax-cy}\right]$$

451. $\dfrac{y^6-a^6}{(y+a)(y^2+ay+a^2)}$; $\dfrac{m^2-4mn+3n^2}{4m-4n-5mn+5m^2}$.

$$\left[(y-a)(y^2-ay+a^2);\ \frac{m-3n}{4+5m}\right]$$

452. $\dfrac{12a^2-3b^2}{8a^2+2b^2+8ab}$; $\dfrac{a^2(a+3b)+b^2(3a+b)}{a^3+a^2-ab^2-b^2}$

$\left[\dfrac{3(2a-b)}{2(2a+b)};\ \dfrac{(a+b)^2}{(a-b)(a+1)}\right]$

453. $\dfrac{abm^3-3abm^2+3abm-ab}{a^3b^3m^2-a^3b^3}$; $\dfrac{2a^2+3a-9}{a^4-5a^3-3a^2+45a-54}$.

$\left[\dfrac{(m-1)^2}{a^2b^2(m+1)};\ \dfrac{2a-3}{(a^2-5a+6b)(a-3)}\right]$

454. $\dfrac{m^2x^2-n^2+m(n-x)-n(m-x)+x(m-n)}{m^2x^2+n^2+2mnx}$. $\left[\dfrac{mx-n}{mx+n}\right]$

455. $\dfrac{a^3b+a^2b^2+ab^3}{a^3b-b^4}$; $\dfrac{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz}{x^2-y^2-z^2-2yz}$. $\left[\dfrac{a}{a-b};\ \dfrac{x+y+z}{x-y-z}\right]$

456. $\dfrac{(x+3y)^3-27}{x^2+9y^2+9+6xy-6x-18y}$; $\dfrac{a^5+a^4+a^3+a^2+a+1}{a^6-1}$.

$\left[\dfrac{x^2+6xy+9y^2+3x+9y+9}{x+3y-3};\ \dfrac{1}{a-1}\right]$

457. $\dfrac{x^2+(2a-3)x+a(a-3)}{x^2+(3a+1)x+a(2a+1)}$; $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$. $\left[\dfrac{x+a-3}{x+2a+1};\ \dfrac{1}{x^2-y^2}\right]$

Scrivere le seguenti divisioni sotto forma di frazioni algebriche e semplificare.

458. $(6xy-12):6x$; $\left(m^2+m^2n\right):4m^2x$.

459. $\left(7x^2yz-14xy^2\right):35x^2$; $(ab+ac):ab$.

Completare le seguenti uguaglianze:

460. $\dfrac{2x+y}{x-2y}=\dfrac{\ldots}{3x^2-6xy}$; $\dfrac{b^2-a^2}{a+b}=\dfrac{a^2-b^2}{\ldots}$.

461. $\dfrac{a^2-4b^2}{a^2-ab-2b^2}=\dfrac{\ldots}{a+b}$; $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}=\dfrac{\ldots}{(x+2)}$.

462. $\dfrac{x^3+y^3+3x^2y+3xy^2}{4x^2+8xy+4y^2}=\dfrac{\ldots}{4}$; $\dfrac{2a^2+2b^2-4ab}{a\left(a^2-b^2\right)-\left(a^3-b^3\right)}=\dfrac{\ldots}{b^2}$.

Dire quale delle seguenti uguaglianze è vera o falsa, giustificando la risposta.

463. $\frac{ax+b}{ax+d}=\frac{b}{d}$; $\quad \frac{3x^2+5x+6}{3x^2+5x+3}=2$.

464. $\frac{ax-by+bx}{ay+bx-xy}=-\frac{by-ax-bx}{ay+bx-cy}$.

465. $\frac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2}=2$; $\quad \frac{am+bm}{3a+3b}=\frac{m}{3}$.

466. $\frac{a-3}{b-5}=\frac{3-a}{5-b}$; $\quad \frac{a^2-a}{a}=a^2$.

467. $\frac{6a-6b}{3a^2-3ab}=\frac{2}{a}$; $\quad \frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$.

Eseguire le seguenti operazioni:

468. $\frac{x^7y^8}{8xy^5}:\frac{9x^3y^3}{12x^4y^{10}}$; $\quad \frac{5b^5c^5}{8b^8c^8}:\frac{4b^4c^4}{26b^3c^7}$. $\quad \left[\frac{1}{6}x^7y^{10};\ \frac{5}{2b^4}\right]$

469. $\frac{xy^2z^5}{x^2y^5z^4}\cdot\frac{x^4z^4}{x^2y^2z^6}$; $\quad \frac{2x-4y}{6x+3y}\cdot\frac{2x^2+xy}{4x+8y}$. $\quad \left[\frac{x}{y^5z};\ \frac{x(x-2y)}{6(x+2y)}\right]$

470. $\frac{2x^2+3xy}{xy-3y^2}:\frac{3x^2+6xy}{2x-6y}$; $\quad \frac{x^3-y^3}{x}\cdot\frac{y-x}{x^3+x^2y+xy^2}\cdot\frac{xy}{(x-y)^2}$

$\left[\frac{2(2x+3y)}{3y(x+2y)};\ -\frac{y}{x}\right]$

471. $\frac{xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{x-y}{x^3-y^3}:\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$; $\quad \frac{cb+ac}{ab+bc}\cdot\frac{ab-bc}{bc+c^2}$.

$\left[\frac{xy}{(x^2-y^2)(x^2-xy+y^2)};\ \frac{(b+a)(a-c)}{(a+c)(b+c)}\right]$

472. $\frac{3x-9y}{8x+4y}:\frac{12x+12}{2x^2+xy}$. $\quad \left[\frac{x(x-3y)}{16(x+1)}\right]$

473. $\frac{xy-4y^2}{x^2-4xy+16y^2}\cdot\frac{x^3+64y^3}{x^3-16xy^2}$. $\quad \left[\frac{y}{x}\right]$

474. $\dfrac{2a+b}{3a^2-a}\cdot\dfrac{3a-1}{8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3}:\dfrac{a}{4a^2+4ab+b^2}$. $\left[\dfrac{1}{a^2}\right]$

475. $\dfrac{m^4-m^2n^2}{4m^2n^2+4mn^3+n^4}\cdot\dfrac{2m^2n+mn^2}{m^2+mn}:\dfrac{m^2-mn}{2mn^2+n^3}$. $[mn]$

476. $\dfrac{x^2+y^2+2xy}{2za-6la-zb+3lb}:\dfrac{2xa+xb+2ya+by}{z^2-6zl+9l^2}\cdot\dfrac{4a^2-b^2}{xz-3xl+yz-3yl}$. $[1]$

477. $\dfrac{8x^2y-4xy^2}{5ab^2}:\dfrac{2xy^2-4x^2y}{5a^2b}$. $\left[-\dfrac{2a}{b}\right]$

478. $\dfrac{x^3-y^3}{x^3-y^3-3xy(x-y)}:\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$. $[1]$

479. $\dfrac{3x^2+7x+2}{2x^2+7x+6}:\dfrac{x^2-1}{2x^2+x-3}$. $\left[\dfrac{3x+1}{x+1}\right]$

480. $\dfrac{-4x^2+4xy}{4x^2+36y^2-24xy}:\dfrac{x^3-x^2y-5xy^2-3y^3}{x^3-xy^2}$.

481. $\dfrac{a^3+8}{-21a^2b-4b^3+9a^3+16ab^2}:\dfrac{\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}}{6ab^2-4b^2}:\dfrac{a^2b^3-2ab^3+4b^3}{3a^2-2b}$.

482. $\dfrac{1+\dfrac{3a+9}{a^2}}{1-\dfrac{a}{a-3}}\times\dfrac{a^2}{a^3-27}+\dfrac{1+\dfrac{1+2a}{a^2}}{\dfrac{a}{a-3}-1}\times\dfrac{a^2}{a^2-2a-3}$. $\left[\dfrac{a}{3}\right]$

483. $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}\times\dfrac{m^3x+3m^3-n^3x-3n^3}{m^2x+n^2x+2mnx-4x+4m^2+4n^2+8mn-16}\times$
$\times\dfrac{m+n+2}{m-n}$.

484. $\dfrac{2x^4y^2-2xy^5}{-2y^2x^2-2y^4+4xy^3}:\left(\dfrac{x^2+xy}{x-y}-\dfrac{x^2y}{x^2-y^2}\right)$. $[-(x+y)]$

485. $\left[\dfrac{a^3-1}{a^3-b^3}:\dfrac{(a+1)^2-a}{(a+b)^2-4ab}+\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{ab(2a-b)}{a^3-b^3}\right]\times\left(a+\dfrac{b^2}{a+b}\right)$.

486. $\dfrac{\left(\dfrac{x-2a}{x^2-ax-6a^2}-\dfrac{1}{3a-x}\right)\times\left(x-3a+\dfrac{2a^2}{x}\right)+\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right):\left(\dfrac{a}{x}+1\right)}{\left[\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)^2:\left(\dfrac{x^4+4a^2x^2+4ax^3}{x^4a^2}\right):\left(x-4a+\dfrac{3a^2}{x}\right)\right]}.$ $\left[\dfrac{(x-5a)(x+2a)^2}{ax}\right]$

487. $\left[\left(\dfrac{2}{a^2-a-2}-\dfrac{3}{a^2+a-6}\right):\left(\dfrac{2}{a+1}-\dfrac{3}{a+3}\right)\right]^2\cdot\left(\dfrac{a^2+4}{2}-2a\right).$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

488. $\left(\dfrac{x+2y}{x}+\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2+2y^2}{x^2+xy}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+y^2}{2xy}+1\right).$ $\left[\dfrac{2(x+y)}{x}\right]$

489. $\left[\dfrac{\dfrac{a^3-1}{a^2-1}}{\left(a+\dfrac{1}{a+1}\right)(a^3-1)}+\dfrac{2-\dfrac{1}{a}}{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a-1}\right)}:\dfrac{4a^2-6a+2}{-a^2+2a-1}\right]\times\left(\dfrac{a^2-8ab+15b^2}{a^2-6ab+9b^2}\right).$ $\left[\dfrac{2\left(2a^2-2a+1\right)(a-5b)}{a-3b}\right]$

Ridurre allo stesso denominatore le seguenti frazioni:

490. $\dfrac{2}{xy},\quad \dfrac{3x+1}{x^2z},\quad \dfrac{y}{2yz^4};\quad \dfrac{5a}{bc},\quad \dfrac{7a-1}{9bc},\quad \dfrac{3a+2}{ac}.$

491. $\dfrac{2}{x^2-y^2},\quad \dfrac{7}{x+y},\quad \dfrac{4x}{(x-y)^2};\quad \dfrac{8x+3y}{x^2+y^2},\quad \dfrac{1}{(x-y)(x+y)},\quad \dfrac{2x}{(x-y)^2}.$

492. $\dfrac{3}{c+2d},\quad \dfrac{2d}{(c-2d)\left(c^2-4d^2\right)},\quad \dfrac{5d}{(c+d)^2}.$

493. $\dfrac{1}{\left(a^2-2ab+b^2\right)(a-b)},\quad \dfrac{a-2}{a^2+4ab+b^2},\quad \dfrac{ab}{\left(a^2+2ab+b^2\right)(a+2b)}.$

494. $\dfrac{(a-b)}{(a-1)},\quad \dfrac{a-1}{a+1},\quad \dfrac{a^2-b^2}{a^2-1},\quad \dfrac{7a}{a^3+a}.$

495. $\dfrac{3-2a}{a^2-5a+6},\quad \dfrac{7a+5}{a-5},\quad \dfrac{2a^2}{a-2}.$

496. $\dfrac{a+b}{2a(a-b)}$, $\quad \dfrac{a-b}{3b(a+b)}$, $\quad \dfrac{2a}{a^2-b^2}$.

497. $\dfrac{3}{a^2-2ab+b^2}$, $\quad \dfrac{2}{a^2+2ab+b^2}$, $\quad \dfrac{1}{a^2-b^2}$.

498. $\dfrac{2}{a^2-9a+14}$, $\quad \dfrac{1}{7a-a^2}$, $\quad \dfrac{a}{a^2-49}$.

Eseguire le seguenti somme algebriche:

499. $\dfrac{x}{6yz}+\dfrac{3y}{10xz}-\dfrac{2z}{15xy}$; $\quad \dfrac{x-4y}{2y^3}+\dfrac{6x-y}{3xy^2}-\dfrac{y-2x}{6x^2y}$.

$$\left[\frac{5x^2+9y^2-4z^2}{30xyz};\ \frac{3x^3-y^3}{6x^2y^3}\right]$$

500. $\dfrac{4x^2-6xy+3y^2}{2x(x+y)}-\dfrac{2x-3y}{x+y}$; $\quad \dfrac{a^2-2ab-b^2}{b(a-b)}+\dfrac{a+b}{a-b}$.

$$\left[\frac{3y^2}{2x(x+y)};\ \frac{a}{b}\right]$$

501. $\dfrac{b^2}{a^2-3ab+2b^2}-\dfrac{a-b}{a-2b}$; $\quad \dfrac{3z^2+6zw}{z^2+zw-6w^2}-\dfrac{z+2w}{z-2w}$.

502. $\dfrac{3}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{4}{2x-y}$; $\quad \dfrac{4}{h+1}-\dfrac{5}{2h+1}+\dfrac{7}{h-1}$.

$$\left[\frac{6xy}{(x-y)(x+y)(2x-y)};\ \frac{17h^2+17h+8}{(2\mathrm{h}+1)(h^2-1)}\right]$$

503. $\dfrac{5x}{x+2y}+\dfrac{x+6y}{x^2-4y^2}-\dfrac{2}{x-2y}$; $\quad \dfrac{3z^2-wz}{2w^2-5wz-3z^2}-\dfrac{5w}{2w+z}+1$.

$$\left[\frac{5x-1}{x+2y};\ -\frac{3w}{2w+z}\right]$$

504. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{2a}{a^2-b^2}$; $\quad \dfrac{1}{2a+2b}+\dfrac{1}{2(a+b)}+\dfrac{b-a}{a^2+2ab+b^2}$.

$$\left[\frac{4a}{(a-b)(a+b)};\ \frac{2b}{(a+b)^2}\right]$$

505. $\dfrac{5a-9}{a^2-4a+3}-\dfrac{2}{a-1}-\dfrac{3}{a-3}$; $\quad \dfrac{3(x+y)-1-a}{x+y+ax+ay}+\dfrac{2x+2y}{x^2+2xy+y^2}$.

$$\left[0;\ \frac{3(x+y)+(1+a)}{(x+y)(1+a)}\right]$$

506. $\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{y-x}+\frac{4xy}{x^2-y^2};\quad \frac{2x}{xy-y^2}-\frac{2y}{x^2-xy}+\frac{x+y}{2xy}.$ $\quad\left[0;\ \frac{5(x+y)}{2xy}\right]$

507. $\frac{a-b}{a^2-ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{1}{b};\quad \frac{a+1}{a-1}-\frac{3a-1}{a^2-1}-\frac{a-1}{a+1}.$ $\quad\left[\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)};\ \frac{1}{a-1}\right]$

508. $\frac{a^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2}{(a+b)^2}-\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}.$ $\quad\left[\frac{2ab}{a^2-b^2}\right]$

509. $\frac{2t-t^2}{tz^2+tz+t}-\frac{2-tz}{t^3-1};\quad \frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x+y}-\frac{y}{x^2-yx}.$

$$\left[\frac{(2-t)\left(t^3-1\right)-(2-tz)\left(z^2+z+1\right)}{\left(z^2+z+1\right)\left(t^3-1\right)};\ \frac{1}{x}\right]$$

510. $\frac{1}{x^3-x^2y}+\frac{1}{y^2(y-x)}+\frac{x^2-y^2}{x^3y^2-x^2y^3};\ \frac{5}{4(x-y)}-\frac{1}{2(x+y)}-\frac{4}{2x-y}.$

511. $\frac{1}{a^2-4a+3}+\frac{1}{a^2-3a+2}-\frac{1}{a^2-5a+6};\ \frac{3}{(h+1)}-\frac{8}{(2h+1)}-\frac{1}{h-1}.$

$$\left[\frac{a-4}{(a-1)(a-3)(a-2)};\ \frac{6}{(h+1)(2h+1)(h-1)}\right]$$

512. $\frac{2a^2}{a^3-8}-\frac{a+2}{a^2+2a+4}+\frac{1}{-a};\quad \frac{9}{x+3y}-\frac{5}{x-y}+\frac{16}{x-2y}.$

$$\left[\frac{4(a+2)}{a\left(a^3-8\right)};\ \frac{20x^2}{(x+3y)(x-y)(x-2y)}\right]$$

513. $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}-\frac{a(a-b)}{a^3+b^3}+\frac{1}{a+b}.$ $\quad\left[\frac{a^2}{a^3+b^3}\right]$

514. $\frac{1}{x-1+y-xy}-\frac{1}{x+1+y+xy}.$ $\quad\left[\frac{2(xy+1)}{x^2+y^2-x^2y^2-1}\right]$

515. $\frac{x-3}{x+4}-\frac{x^2-9a-3}{x^2+x-12}-\frac{5-x}{x-3}.$ $\quad\left[\frac{x(x-7)+(9a-8)}{(x-3)(x+4)}\right]$

516. $\dfrac{a^3+3+a^2+3a}{a^3+3a^2+3a+1}+\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a^2-2a+1}{(a+1)^2}$. $\qquad$ [1]

517. $\dfrac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}$. $\qquad \left[\dfrac{2(a+b)}{(a-b)}\right]$

518. $\dfrac{ab}{5a-2b}-\dfrac{5a^2}{4b-10a}-\dfrac{3a+b}{10}-\dfrac{2b^2+3ab}{20a-8b}$. $\qquad \left[\dfrac{(20a^2-6b^2+7ab)}{20(5a-2b)}\right]$

519. $\dfrac{2b^2}{a^2}+\dfrac{2a^2-b^2}{2ab}+\dfrac{a^2-2b^2}{a^2}+\dfrac{b}{2a}$. $\qquad \left[\dfrac{a+b}{b}\right]$

520. $\dfrac{13-5a}{6a^2-6}+\dfrac{3a}{a+1}+\dfrac{3a-5}{3a-3}-\dfrac{2a-7}{2a+2}$. $\qquad$ [3]

521. $\dfrac{a+3b}{a^2+ab}+\dfrac{b^2-8ab-5a^2}{5a^3+5a^2b}+\dfrac{a-5b}{5a^2+5a^2b}$. $\qquad \left[\dfrac{a+b}{5a^2}\right]$

522. $\dfrac{a^2}{a^2-ac-ab+bc}+\dfrac{b^2}{b^2+ac-ab-bc}+\dfrac{c^2}{c^2-ac+ab-bc}$. $\qquad$ [1]

Semplificare le seguenti frazioni:

523. $\dfrac{\dfrac{12x^3y^2}{ab^2}}{48a^2y^3x^2}$; $\quad \dfrac{-\dfrac{7a^5b^2}{x^4y^3}}{-\dfrac{7a^5b}{xy^3}}$; $\quad \dfrac{\dfrac{18a^4x^3y^2(x+y)^2}{b^4c^2}}{\dfrac{9a^4y^2(x+y)}{3b^2c}}$.

$$\left[\frac{x}{4a^3b^2y};\ \frac{b}{x^3};\ \frac{6x^3(x+y)}{b^2c}\right]$$

524. $\dfrac{\dfrac{5x^8y^4}{6(x+y)^2}}{\dfrac{y^2x^2}{3(x+y)^3}}$; $\quad \dfrac{\dfrac{5x}{y}+\dfrac{1}{z}}{\dfrac{3x(x+z)}{yz}}$; $\quad \dfrac{\dfrac{4(x+y)-2}{x^2-y^2}}{\dfrac{2(x-y)+4}{(x+y)^2}}$.

$$\left[\frac{5}{2}x^6y^2(x+y);\ \frac{(5xz+y)}{3x(x+z)};\ \frac{(x+y)[4(x+y)-2]}{(x-y)[2(x-y)+4]}\right]$$

525. $\dfrac{2-\dfrac{3}{a+2}}{\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a+2}}$; $\quad \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{y-2}+\dfrac{1}{x-1}}$. $\qquad \left[(a-1);\ \dfrac{(x-1)^2(y-2)}{x(x+y-3)}\right]$

526. $\dfrac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}{2+\dfrac{3x-1}{2x-2}}$; $\dfrac{\dfrac{y(x+y)^2}{(x^2-y^2)}}{\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}}$. $\left[\dfrac{2(x-1)^3}{x(7x-5)};\ \dfrac{y(x+y)(x^2-1)}{x(x-y)}\right]$

Semplificare le seguenti frazioni:

527. $\dfrac{4x^2+2x}{x-3}:\left[\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{2x}{3x+3}+\dfrac{x^2-7x}{6x^2-6}\right]$.

528. $\left(\dfrac{2a^2}{a^3-8}-\dfrac{a+2}{a^2+2a+4}+\dfrac{1}{2-a}\right)\cdot\dfrac{8-a^3}{4}$. $\left[\dfrac{a}{2}\right]$

529. $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{a-1}+\dfrac{3}{a-3}-\dfrac{5a-9}{a^2-4a+3}\right)$. $[0]$

530. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{4x+4y}\right):\dfrac{2x+2y+3}{x^2+2xy+y^2}$. $\left[\dfrac{(x+y)}{4}\right]$

531. $\left(\dfrac{2}{a^2-a-2}-\dfrac{3}{a^2+a+6}\right):\left(\dfrac{2}{a+1}-\dfrac{3}{a+3}\right)$. $\left[\dfrac{1}{a-2}\right]$

532. $\left[\left(\dfrac{1}{3-a}+\dfrac{a}{a^2-9}\right):\left(\dfrac{a}{a+3}-1\right)\right]\cdot\left(a^2-6a+9\right)$. $[(a-3)]$

533. $\dfrac{am+an+m+n}{am-an+m-n}:\left(\dfrac{m+n}{m-n}-\dfrac{m-n}{m+n}\right)$. $\left[\dfrac{(m+n)^2}{4mn}\right]$

534. $\left(\dfrac{5a+5}{a^2+3a+2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3a+6}{a^2-a-6}\right)(a+2):\dfrac{1}{a+1}$. $\left[\dfrac{-(a+1)(a+3)}{2}\right]$

535. $\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}\right)\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$. $[x-y]$

536. $\left[\left(\dfrac{2a+3b}{3a-4b}-\dfrac{2a-3b}{3a+4b}\right):\dfrac{17a}{9a^2-16b^2}\right]+\dfrac{1}{9a^2-16b^2}$. $\left[\dfrac{2b}{9a^2-16b^2}\right]$

537. $\left(\dfrac{a-bc}{b-c}\right)^2+\left(b-\dfrac{a-bc}{b-c}\right)\cdot\left(c-\dfrac{a-bc}{b-c}\right)$. $[a]$

538. $\left[\left(\dfrac{x+y}{x-y}-1\right):\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\right]+\dfrac{1}{x^2-y^2}$. $\left[\dfrac{x^2+y^2+2xy+1}{x^2-y^2}\right]$

539. $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{2a}{1-a^2}\right).$ $\left[\frac{(a+1)}{a(1-a)}\right]$

540. $\left(\frac{a^2+1}{a^2-3a-4}-\frac{a+1}{a-4}\right)^2:\left(\frac{1}{a-4}\right)^2.$ $\left[\frac{4a^2}{(a+1)^2}\right]$

541. $\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}-\frac{2a^2+2}{a^2-1}\right)^2:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right).$ $[0]$

542. $\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{a-b}{a+b}\right]:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right).$ $[0]$

543. $\left(x+\frac{2x}{x-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(\frac{x^2+3}{x-1}+\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}\right).$ $[1]$

544. $\left(\frac{ay+bx}{2x^2y-2xy^2}+\frac{ay+bx}{2x^2y+2xy^2}\right)\cdot\left(x^2-y^2\right).$ $\left[\frac{ay+bx}{y}\right]$

545. $\left(\frac{x+y}{2xy}-\frac{2y}{x^2-xy}+\frac{2x}{xy-y^2}\right):(x+y).$ $\left[\frac{5}{2xy}\right]$

546. $\frac{x^2-y^2}{3}\cdot\left(\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right).$ $\left[\frac{2(x+y)^2}{3}\right]$

547. $\left[\left(3a-\frac{9a^2+x^2}{3a+x}\right)\cdot\left(3a-\frac{x^2}{3a}\right)\right]:\left[\left(3a-\frac{9a^2}{3a-x}\right)\cdot\frac{1}{3a-x}\right].$

548. $\left[\left(\frac{x^2+4a^2}{2ax}+2\right):\left(\frac{x^2+4a^2}{2ax}-2\right)\right]:\left(\frac{x}{x-2a}:\frac{2a}{x+2a}\right)^2.$ $\left[\frac{4a^2}{x^2}\right]$

549. $\left(\frac{x^2+3x}{x^2+3x+9}+\frac{9(x+3)^2}{x-27}-\frac{x+3}{x-3}\right)\cdot\frac{x^3-27}{x^3+27}.$

550. $\left(\frac{5-2a}{3+5a}+\frac{5+2a}{5a-3}\right):\frac{25-4a^2}{9-25a^2}.$ $\left[-\frac{62a}{25-4a^2}\right]$

551. $\frac{1}{1+\frac{1}{a}}-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}+\frac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}}\cdot\frac{\frac{3a+1}{a-1}-3}{1-\frac{a-3}{a+1}}.$

552. $\dfrac{\left(\dfrac{x}{4}-x+\dfrac{3}{4x}\right)\cdot\left(\dfrac{2+2x}{1-x}-\dfrac{2-2a}{a+x}\right)}{\left(\dfrac{4x^2}{1-x^2}-\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{1+x}{1-x}\right)\cdot\dfrac{2-2x}{3x}}.$

553. $\dfrac{\dfrac{3a}{2b}+1}{\dfrac{(3a-2b)^2}{24ab}+1}\cdot\left(\dfrac{2b}{3a}+1\right)+\dfrac{\dfrac{2b}{3a-2b}+\dfrac{3a}{3a+2b}}{\dfrac{2b}{3a+2b}-\dfrac{3a}{3a-2b}}.$

554. $\dfrac{\left(x+\dfrac{x+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1+\dfrac{x^2+1}{2x}\right)\cdot\left(\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x}{x^2+1}}.$

555. $\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4x+4}:\dfrac{x^4-3x^2+1}{x^2-5x+6}.$ $\left[\dfrac{x-3}{(x-1)^2}\right]$

556. $\dfrac{z^5-2z^4+z}{z^3-2z^2+z}\cdot\dfrac{z^2-5z+4}{z-4}.$

557. $\dfrac{a^4-2a^2b^2+b^4}{(a+b)^2-2ab}:\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right).$ $[1]$

558. $\dfrac{a^4-a^3+a-10}{a^6-9a^3+8}\cdot\dfrac{a^2-3a+2}{a^3+a^2+2a+5}\cdot\dfrac{a-2}{a^2+a+1}.$

559. $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{(a-b)^2-2b(b-a)}{a^5b^2+5a^3b+6}:\dfrac{a^3-b^3}{(a^3b+2)(3+a^3b)}.$ $[1]$

560. $\dfrac{a^4+b^4+a^2b^2}{a^2+ab-6b^2}\cdot\dfrac{a^2+5ab+6b^2}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{a^2-ab-2b^2}{a^3-b^3}-\dfrac{b}{a-b}.$ $\left[\dfrac{a+b}{a-b}\right]$

561. $\left[1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}\right)\right]:\left(\dfrac{x^2+y^2}{2xy}-1\right).$ $[-1]$

562. $\left(\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}-2\right)\cdot\left(1-\dfrac{2}{a+1}\right)\cdot\left(a+\dfrac{1}{a}+2\right).$ $\left[\dfrac{4}{a}\right]$

563. $\dfrac{\dfrac{2a+1}{a^2-3a+2}-\dfrac{a+3}{a-2}+\dfrac{a+1}{a-1}}{a-\dfrac{a^2-a-1}{a-1}}+\dfrac{a}{a-1}.$ $\left[\dfrac{1}{a-1}\right]$

564. $\left[\dfrac{a^2\left(\dfrac{1+a}{1-a}-\dfrac{1-a}{1+a}\right)}{\left(\dfrac{1+a}{1-a}-1\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+a}\right)}\right]:\left(4a^2-1\right).$ $\left[\dfrac{1}{2a-1}\right]$

565. $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}}{\dfrac{2a}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}}+\dfrac{a^2-6ab+b^2}{a-b}.$ $[a-b]$

7.10. Equazioni algebriche di 1° grado

Esercizio 18

Risolvere l'equazione $\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}(\frac{1}{3}-x)+5=0$.

Soluzione

L'equazione non si presenta nella forma canonica $ax+b=0$. Eseguendo le operazioni algebriche del primo membro, l'uguaglianza ovviamente non varia.

$$\frac{x}{2}+\frac{1-3x}{18}+5=0.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per il m.c.m. dei denominatori (18) si ha:

$$9x+1-3x+90=0$$

ed eseguendo le operazioni:

$$6x+91=0$$

che è la forma canonica desiderata, da cui

$$x=-\frac{91}{6}.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione data si trova che essa è soddisfatta.

Esercizio 19

Risolvere l'equazione $\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+2}$ per $x \neq -2$, $x \neq \pm 1$.

Soluzione

Un'equazione di questo tipo viene comunemente chiamata **equazione razionale fratta** o frazionaria. Ma non è necessario, ora, introdurre tale nomenclatura; infatti essa è per noi una normale equazione [$f(x)=g(x)$] da ridurre in forma canonica. A tale scopo conviene ridurre a denominatore comune e poi moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il m.c.m. dei loro denominatori, che è $\left(x^2-1\right)(x+2)$:

$$\frac{(x+2)^2}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{x^2-1}{(x^2-1)(x+2)}$$

Da cui, uguagliando i numeratori

$$x^2+4x+4=x^2-1.$$

Sottraendo ad ambo i membri x^2-1 si ha

$$4x+5=0$$

Da cui

$$x=-\frac{5}{4}.$$

Sostituendo tale valore nell'equazione data si trova che essa è soddisfatta.

Esercizio 20

Risolvere l'equazione $(a+1)^2x+ax=a^2x+a$.

Soluzione

È un'equazione di primo grado letterale, ossia dipendente dal parametro libero *a* che può assumere tutti i valori reali. Eseguendo i calcoli del primo membro:

$$(a^2+2a+1)x+ax=a^2x+a$$

$$a^2x+2ax+x+ax=a^2x+a.$$

Sottraendo ad ambo i membri la quantità ax^2+a si ha

$$(3a+1)x-a=0$$

Da cui

$$x=\frac{a}{3a+1}$$

che ha senso per $a\neq-\frac{1}{3}$ (per $a=-\frac{1}{3}$ il denominatore si annulla)

Nel risolvere queste equazioni di primo grado, abbiamo semplicemente applicato alcuni principi validi per ogni tipo di equazione; prima di enunciarli, però, occorre dare la seguente definizione:

Definizione

Due equazioni si dicono equivalenti se e solo se hanno le stesse radici.

- **Primo principio di equivalenza**
  Operando in ambo i membri di un'equazione secondo le regole del calcolo algebrico, si ottiene un'equazione equivalente.
- **Secondo principio di equivalenza**
  Sommando o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione una stessa espressione algebrica (in particolare, un numero), si ottiene un'equazione equivalente
- **Terzo principio di equivalenza**
  Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per una stessa espressione algebrica (in particolare, un numero), purchè diversa da zero per ogni valore della variabile e non priva di significato, si ottiene un'equazione equivalente.

Osserviamo esplicitamente che:

1. L'applicazione del secondo principio porta come conseguenza la seguente " regola pratica":

   Un termine qualunque di un'equazione si può trasportare da un membro all'altro, purchè lo si cambi di segno.

2. Dal terzo principio si ricava facilmente che

   Si possono cambiare di segno tutti i termini di un'equazione senza alterarne le radici.

   Ciò equivale a moltiplicare per -1 ambo i membri dell'equazione.

Esercizio 21

Risolvere l'equazione

$$(x-1)^2+3x-3=(x+5)^2-1$$

Specificando in ogni passaggio il principio di equivalenza che si applica.

Ricapitolando: per trasformare un'equazione di primo grado nella forma canonica

$$ax+b=0$$

la cui unica soluzione è

$$x=-\frac{b}{a}$$

occorre generalmente:

1. Eseguire le operazioni algebriche eventualmente indicate;
2. eliminare gli eventuali denominatori, moltiplicando per il loro m.c.m. (escludendo i valori dell'incognita per cui esso è zero);
3. trasportare tutti i termini, cambiando segno, allo stesso membro.

7.11. Esercizi Supplementari

1. $2(0.6x-0.2-1)+1=1.3(0.3x-0.6+0.75)$. [≈ 1.97
2. $2\left(x+\frac{2}{3}\right)-4\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{3}\right)=1$. [1
3. $2x-\frac{x-1}{2}=x-1+\frac{2x-4}{3}$. [17
4. $5(x+1)-(1-x)(x+1)=(x+2)^2$. [0
5. $4(x-2.5)-3(3x-1.5)=5-2(x-1.25)+x$. [−3.25
6. $\frac{2x-5}{6}-\frac{3x-2}{3}=\frac{1}{2}x+4$. [−3.57

7. $-\frac{1-x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{1}{12}$. $\left[\frac{11}{13}\right]$

8. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-2\right)\right]-2\right\}+2=x$. $\left[\frac{4}{5}\right]$

9. $\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\right]+\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-x^2=\left(\frac{3}{2-x}\right)^{-1}$. $\left[-\frac{1}{3}\right]$

10. $\frac{1}{12}-\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-x\right)\right]+\frac{5-3x}{6}=2-\frac{x-3}{12}$. $[-4]$

11. $\frac{3}{7}\left[5\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{5}\right)+4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x\right)\right]+\frac{x-4}{14}=\frac{2-5x}{2}+\frac{x+2}{7}$. $\left[\frac{13}{16}\right]$

12. $-\frac{1}{5}\left\{-\frac{1}{3}-\left[-\frac{1}{2}-\left(-5-\frac{3-x}{2}\right)-x\right]-\frac{x}{2}\right\}+\frac{3-x}{15}=x-\frac{1-3x}{10}$. $[1]$

13. $\frac{1-2x}{2-\frac{3}{4}}-\frac{x-4}{3-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{23-39x}{42}$.

14. $\frac{4x-3}{3}-\frac{x}{6}+\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(1-x)\right]$. $\left[\frac{10}{17}\right]$

15. $6x-\frac{4x-3}{2}-\frac{2-x}{4}=\frac{2(x-3)}{3}-2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{3-x}{2}$. $\left[-\frac{45}{64}\right]$

16. $\frac{3+2x}{5}-\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{3-x}{4}-\frac{1+x}{3}\right)-\frac{2}{5}x\right]=\frac{5+x}{3}$. $\left[-\frac{69}{7}\right]$

17. $\left[-\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}(3+x)\right]:\left(-\frac{3}{4}\right)=\left[(x-1)^2-x(x-1)\right]$. $\left[\frac{7}{4}\right]$

18. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-2\right)-2\right]-2\right\}-2=3x$. $\left[-\frac{60}{47}\right]$

19. $-\frac{1}{5}\left\{-\frac{1}{3}-\left[1-\left(-5-\frac{3-x}{2}\right)+x\right]-\frac{x}{2}\right\}+\frac{3-x}{18}=\frac{x}{10}$. $[-39]$

20. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)^2$ [0]

21. $24.37-3(0.4+4.1x)+2.3(0.1x-0.3)+$ $+4.1(0.3x-0.2)=0.2(1.3-0.7x).$ [2]

22. $2.3x-2.3-0.5x-25.23=1.2x-3.41-0.12-4.2x.$ [5]

23. $\frac{-1.\overline{6}x+1.\overline{3}+x}{8}=0.\overline{3}x-4.\overline{1}.$

24. $\frac{0.4\overline{2}x-0.3\overline{3}}{0.\overline{5}}=1.2\overline{2}.$

25. $\frac{-1.\overline{6}x+0.8\overline{3}}{0.\overline{5}}=5.$

26. $0.3x+2.31=4.5x-6.1.$ [2.002]

27. $10[2x-3(3-x)]=30+40x.$ [12]

28. $12x-400(4-3x)=4(3x-20).$ $\left[\frac{19}{15}\right]$

29. $\frac{x+22}{22}+\frac{x+31}{31}+\frac{x+43}{43}=3.$ [0]

30. $\frac{2x-1}{6}+\frac{3x+1}{9}+\frac{4x+1}{4}=\frac{17}{36}.$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

31. $\frac{x-1}{4}+\frac{x-1}{6}+\frac{x-1}{8}=\frac{13}{24}.$ [2]

32. $\frac{2}{3}-\frac{5x-15}{3}=9-5x.$ [1]

33. $\frac{1}{3}-\frac{x+3}{8}=\frac{2-x}{3}+\frac{5(1-x)}{6}-\frac{1}{12}.$ $\left[\frac{7}{5}\right]$

34. $\frac{5x-16}{3}=-\frac{x+8}{6}+\frac{2x+2}{3}.$ [4]

35. $\frac{2x+1}{7}-\frac{(x-1)(x-2)}{2}=\frac{x-2}{2}-2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$. [3]

36. $\frac{x(x-3)^2}{2}+\frac{x(9x-1)}{3}-\frac{1}{2}x^3=0$. [0]

37. $(x+1)(2x+3)-(2x-1)(x-3)=6(x+1)$. [1]

38. $(3x-1)^2-4x(x+2)=5x(x-1)+10$. [−1]

39. $\left(x^2+2x+1\right)^2+3x^2\left(\frac{5}{3}x+\frac{7}{2}\right)=\frac{3(x^2+3x)^2}{2}-\frac{(x^2+1)^2}{2}-\frac{x-6}{4}$. [0]

40. $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}-1\right)^2=x^2\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{x^2}{2}+1$. [0]

41. $\frac{x+3}{4}-\frac{\frac{9}{2}x-11}{6}=\frac{15-8x}{12}-\frac{\frac{8}{9}\left(\frac{x}{12}+\frac{3}{2}\right)}{4}$. [−9]

42. $\frac{\frac{3}{2}x-2}{4}-\frac{\frac{7}{2}x-2}{5}=\frac{\frac{11}{2}x-18}{6}-x$. [12]

43. $\frac{\frac{x}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}-\frac{\frac{x}{6}-\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{x}{2}+6}{12}$. [6]

44. $(6x+21)(2x+1)=3(2x+3)^2-\frac{2}{3}(2x-1)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

45. $(8-3x)^2-(9-5x)^2+1-20x=-(5-4x)^2-\frac{1}{2}(2x-1)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

46. $\frac{2x-1}{3}-\frac{4x-10}{3}-\frac{8}{9}=\frac{2}{9}\left(\frac{2x+1}{3}-\frac{6x-8}{2}\right)$. $\left[\frac{31}{4}\right]$

47. $\left[-\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}(x+3)\right]:\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)\left[(x-1)^2-x(x-1)\right]$ [0]

48. $\frac{5x+1}{3}=3\left[\frac{2x-1}{6}-1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{9}+2\right)\right]-1$. $\left[-\frac{10}{3}\right]$

49. $\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2-\left(-\frac{13}{3}+5x\right):(-4)+2x=$

50. $\quad =-\frac{1}{4}(1-x)(x+1)+\frac{1+x}{3}+2x\,.$ $\quad [-2]$

51. $\frac{-1.\overline{6}+1.\overline{3}+x}{8}=0.\overline{3}\,, \qquad (x\in\mathbb{Q})$ $\quad [2]$

52. $4x+\frac{0.\overline{3}-2x}{5}=0.\overline{1}-\frac{x}{9}+4x\,.$ $\quad \left[-\frac{2}{13}\right]$

53. $\frac{0.\overline{4}x}{0.\overline{5}}+3x=0.2\,.$ $\quad \left[\frac{1}{19}\right]$

54. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)=$ $\quad$ [impossibile]

55. $\quad =\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)^2\,.$

56. $\frac{4x-3}{3}-\frac{x}{6}+\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(1-x)\right].$ $\quad \left[\frac{10}{17}\right]$

57. $\frac{4x+1}{\frac{2}{5}}=\frac{3x+2}{\frac{1}{6}}\,.$ $\quad \left[-\frac{19}{16}\right]$

58. $\frac{\frac{1}{2}(2x-3)}{5-\frac{3}{2}}=-\frac{3-x}{7}\,.$ $\quad [0]$

Risolvere le seguenti equazioni frazionarie:

Esempio

$$\frac{x}{x+1}+\frac{5}{8}=\frac{5}{2(x+1)}+\frac{3}{4}$$

Soluzione

Supponendo $x+1\neq 0$, moltiplichiamo per $8(x+1)$ ciascun membro dell'equazione:

$$8(x+1)\left(\frac{x}{x+1}+\frac{5}{8}\right)=8(x+1)\left[\frac{5}{2(x+1)}+\frac{3}{4}\right]$$

$$8x+5x+5=20+6x+6$$

$$8x+5x-6x-20-6+5=0$$

$$7x-21=0$$

$$x=\frac{21}{7}=3$$

59. $\frac{2}{x+1}-3=\frac{4x+5}{x+1}$; $\quad \frac{2}{2x+1}=-\frac{3}{7}$. $\left[-\frac{6}{7};-2.8\overline{3}\right]$

60. $\frac{11}{6x+1}=\frac{2}{x+1}$; $\quad \frac{x+1}{x-5}=\frac{x+4}{x-4}$. $[9;8]$

61. $\frac{6x-8}{9x+8}=\frac{2x-3}{3x+2}$; $\quad \frac{1}{x-1}=\frac{2}{3}$. $[8;2.5]$

62. $\frac{1}{x+5}+\frac{1}{2x+9}=\frac{2}{(x+5)(2x+9)}$; $\quad \frac{x+5}{x-1}=\frac{x+2}{x-2}$. $[-4;4]$

63. $\frac{4x-3}{2x-3}=\frac{8x+5}{4x+1}$; $\quad \frac{2x-5}{4x-1}=\frac{3x-4}{6x+9}$. $[-2;7]$

64. $\frac{8}{5x-4}=\frac{5}{3x-1}$; $\quad \frac{x+1}{x-2}=\frac{x-1}{x-3}$. $[12;5]$

65. $\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{3}{(2x+3)(x-3)}$. $[-9]$

66. $\frac{x}{3x-3}+\frac{1}{2x-2}=\frac{x+5}{6x-6}$. $[2]$

67. $\frac{2x^2+5}{x^2-x-2}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-2}{x+1}$. $[0]$

68. $\frac{x^3+x^2}{1-x^2}+1-x-\frac{1-x^2}{x-1}=\frac{x^2+1}{1-x}$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

69. $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}+\frac{4x}{x+1}+\frac{x^2-8x+15}{x^2-2x-3}=2$. $[1]$

70. $\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}+\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}=1$. $\left[\frac{1}{3}\right]$

71. $\frac{2x}{3-x}+\frac{7}{x-3}=-3$. [2]

72. $\frac{4}{x}-\frac{3x-10}{2-x}=\frac{3x}{x-2}$. $[-1.\overline{3}]$

73. $\frac{1}{1-2x}+\frac{x+2}{2x-1}+1=0$. [0]

74. $\frac{3x}{x-2}+\frac{4}{x+2}+\frac{3x^2+8}{4-x^2}=0$. $[1.\overline{6}]$

75. $\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{x^2-4}$. [impossibile]

76. $\frac{(1+x)^2-x}{(1+x)(1+x+x^2)}-\frac{1}{1-x}=\frac{4}{x^2-1}$. [2]

77. $\frac{2(x+1)+(x-1)}{x(x+1)-(x-1)^2}=1$. [impossibile]

78. $\frac{-5}{x^2+5x+6}+\frac{3}{x^2-9}+\frac{2}{x^2-4}=0$. $\left[\frac{12}{5}\right]$

79. $\frac{6(x+1)}{x^2+2x-15}+\frac{5}{x+5}+\frac{2}{x-3}=0$. $\left[-\frac{1}{13}\right]$

80. $\frac{5-x}{x-7}+\frac{x^2-2}{x^2-8x+7}-1=\frac{3-x}{x-1}$. $\left[-\frac{7}{4}\right]$

81. $\frac{1}{3x+4}+\frac{8}{9x^2-16}=\frac{5}{4-3x}$. $[-1.\overline{3}]$

82. $\frac{15x-79}{(x+3)(x-1)}=\frac{x-5}{x-1}-\frac{x-6}{x+3}$. $\left[\frac{29}{5}\right]$

83. $\frac{5x+20}{(3x-5)(x+1)}=\frac{2x-7}{x-5}-\frac{6x-6}{3x-5}$. [−7]

84. $\frac{x(3-x)}{2-x}+\frac{x}{x-2}=x$. [4]

85. $\frac{2x}{x-1}+\frac{x-1}{2x}=\frac{5x-3}{2x-2}$. [−1]

86. $\frac{11}{x^2-4}+\frac{4}{2-x}=\frac{1}{2+x}$. [1]

87. $\dfrac{x(x+10)}{x^2+4x+3}+\dfrac{2x+3}{x+3}=\dfrac{1+3x}{x+1}$. [0]

88. $\dfrac{5}{x^2-4x+3}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{4}{x-3}$. $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

89. $\dfrac{\dfrac{4x+12}{x^2-9}+\dfrac{3}{x+3}}{\dfrac{2}{9-x^2}}=-3$. $\left[\dfrac{3}{7}\right]$

90. $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}}{5-\dfrac{10}{x+2}}=\dfrac{16}{5(x-1)}$. [3]

91. $\dfrac{x^2}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x^2+1}$. $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

92. $\dfrac{x-1}{2x+2}+\dfrac{2x+1}{4x-2}=\dfrac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2}$. $\left[-\dfrac{1}{4}\right]$

93. $\dfrac{y^2}{y^3-8}+\dfrac{3}{y^2+2y+4}=\dfrac{1}{y-2}$. [10]

94. $\dfrac{5(y+1)(y-1)}{(y-2)^3}-\dfrac{3}{(y-2)^2}=\dfrac{5}{y-2}$. $\left[\dfrac{19}{17}\right]$

95. $\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{2x-3}{x^2-x-12}=\dfrac{3}{x+3}$. [−7]

96. $\dfrac{4(x+1)-7x}{4-x}=2+\dfrac{x+4}{x-4}$. [ogni valore di x, $x\neq 4$]

97. $\dfrac{10}{x+3}-\dfrac{6}{2-x}=\dfrac{2}{2x-4}$. $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

98. $\dfrac{(x+1)^2}{1-x^2}+\dfrac{(1-x)^2}{x^2-1}=\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1}{1-x^2}$. $\left[\dfrac{1}{8}\right]$

99. $\dfrac{2}{\dfrac{1}{5}+x}+\dfrac{3}{\dfrac{1}{5}-x}=0$. [−1]

100. $\dfrac{11}{2x^2-8}+\dfrac{4}{4-2x}=\dfrac{1}{4+2x}$. [1]

101. $\frac{2x+3}{2x-1}+\frac{2-3x}{1+2x}+x=\frac{2(x^2-8)}{1-4x^2}+x$. [1]

102. $\frac{6x}{x^3-27}+\frac{x+3}{x^2+3x+9}=\frac{1}{x-3}$. [6]

103. $\frac{5}{x^2-4x+3}+\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x-3}$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

104. $\frac{2}{x-4}+\frac{x-\frac{2}{3}}{x^2-x-12}=\frac{\frac{3}{2}}{x+3}$. $\left[-\frac{68}{9}\right]$

105. $\frac{x+2}{x-3}+\frac{5-x}{x+5}-\frac{5}{x^2+2x-15}=0$. $\left[\frac{2}{3}\right]$

106. $\frac{(y+1)^2}{(y+1)^3-8}+\frac{3}{(y+1)^2+2(y+1)+4}=\frac{1}{(y+1)-2}$. [9]

107. $\frac{-\frac{4}{x+7}+\frac{3}{7-x}}{\frac{2}{x^2-49}}=7$. [−1]

108. $\frac{-\frac{4x+12}{x^2-9}+\frac{3}{x+3}}{\frac{2}{9-x^2}}=3$. [−15]

109. $\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{5-\frac{5}{x+1}}=\frac{16}{5(x+1)}$. $\left[-\frac{5}{3}\right]$

110. $\frac{1}{x}+\frac{x}{4}+\frac{x-2}{x(x+2)}-\frac{x(x+2)}{4(x-2)}=\frac{69}{x^2-4}-2$. [−9]

111. $\frac{1}{(x-1)(x-4)}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3(4-x)}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3(1-x)}$. [2]

112. $\frac{x}{x-1}-\frac{6}{x+1}=1-\frac{5}{x-2}-\frac{2x}{(x^2-1)(x-2)}$. [impossibile]

113. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-2}$. [impossibile]

114. $\dfrac{x-4}{x-2}-\dfrac{2-3x}{x-4}=\dfrac{4x^2-18x+23}{x^2-6x+8}$. $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

115. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x}{2x-1}=\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{x+1}{x-1}$. $[0]$

116. $\dfrac{3}{x^2+2x+1}-x=-\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x^2-1}{x}\right)$. $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

117. $\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2}{2x^2-5x-3}$. $[-6]$

118. $\dfrac{2x+1}{x+1}+\dfrac{3-2x}{2x-1}=\dfrac{3(2x+4x^2+4x^3)}{4x^3+4x^2-x-1}-\dfrac{8x^2}{4x^2-1}$. $[2]$

119. $\dfrac{x-3}{x^2-1}-\dfrac{x+9}{2x-x^2-1}=\dfrac{x+5}{x+1}-\dfrac{2x}{(x-1)^2}-1$. $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

Risolvere le seguenti equazioni letterali nell'incognita x:

120. $5x-8a=0$; $\quad 7x-2a=3x+10a$. $\left[\dfrac{8}{5}a;3a\right]$

121. $ax+5b=3(ax+b)$;
$(x-a)(2x-5a)+4a^2=(2x-a)(x+3a)$. $\left[\dfrac{b}{a};a\right]$

122. $a(x-a)+b(x-b)=(a-b)(a+b)$. $\left[\dfrac{2a^2}{a+b}\right]$

123. $\dfrac{a-x}{b}+\dfrac{x-b}{a}=0$; $\quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=a+b$. $[a+b;ab]$

124. $a(x-b)+b(x-a)=-(a+b)x$. $\left[\dfrac{ab}{a+b}\right]$

125. $\dfrac{2x+a}{a-b}-\dfrac{x-a}{a+b}=\dfrac{3a}{a-b}$. $[a]$

126. $2(a+2)+(x+1)(a+1)=(x-1)(a-1)$. $[-2(a+1)]$

127. $b+1=\dfrac{2b+1}{x+1}$. $\left[\dfrac{b}{b+1}\right]$

128. $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{1-x}$. $\left[-\dfrac{1}{a}\right]$

129. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=0$. $\left[\dfrac{a+b}{2}\right]$

130. $\dfrac{x+m}{2x-m}+\dfrac{m^2}{4x^2-m^2}=\dfrac{1}{2}$. $\left[-\dfrac{5}{6}m\right]$

131. $\dfrac{x-2}{x+a}-\dfrac{x+2}{x-a}=\dfrac{1}{x^2-a^2}$. $\left[-\dfrac{1}{4+2a}\right]$

132. $\dfrac{3b-2a+x}{5a-4b}=\dfrac{2a-3b+x}{2b+3a}$.

133. $\dfrac{a-d}{c}+\dfrac{(c-b)x}{a-b}+c+\dfrac{(a+b)x}{c^2}=\dfrac{d-b}{c}-\dfrac{(a+c)x}{a-b}$.

134. $\dfrac{2a^2-4bc}{abc}-\dfrac{2x-5b}{bc}=\dfrac{3(x-b)}{ac}-\dfrac{4(x-a)}{ab}$.

$\left[\dfrac{4ac-3b^2-5ab+4bc-2a^2}{4c-2a-3b}\right]$

135. $\dfrac{3b-2a+x}{a-4b}=\dfrac{2a-3b+x}{2b-3a}$.

136. $\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{3ax}{a+1}=\dfrac{a}{a^2-a+1}-\dfrac{a(1+3a^2x)}{1+a^3}$.

137. $(2-x)(b-x)(a+x)=bx(2-x)+ax(x-2)-x^2(2-x)$. $[2]$

138. $(a-x)(b+x)=ax-bx-x^2$. [impossibile]

139. $\dfrac{(a+b)x}{a}-\dfrac{4bx+(a-b)^2}{a+b}-\dfrac{b(b-2a)(a-x)}{a^2-b^2}=0$. $[a]$

140. $\dfrac{a-x}{a}+\dfrac{b-x}{b}=\dfrac{a+b-4x}{a+b}$. $\left[\dfrac{ab(a+b)}{(a-b)^2}\right]$

141. $\dfrac{x-ab}{5}-\dfrac{bx-5a^2}{a^2}=\dfrac{25b}{a^2}-\dfrac{b^2}{a}$. $[ab-25]$

142. $\dfrac{x+4}{1-a}-\dfrac{2a}{1-a^2}=\dfrac{x-4}{1+a}-\dfrac{2}{a-1}$. $\left[\dfrac{2a-3}{a}\right]$

143. $\dfrac{x-2}{ab+b^2}-\dfrac{2x}{b}=\dfrac{3}{a+b}-\dfrac{ax}{b}$. $\left[\dfrac{3b+2}{1-(2-a)(a+b)}\right]$

144. $\dfrac{1}{a}(x+b)-x+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2x}{a}$. $\left[\dfrac{b^2+a}{b(a+1)}\right]$

145. $\dfrac{x-a}{a^2-9}-\dfrac{x-3}{3a-a^2}=\dfrac{1}{a}$. $[a]$

146. $\dfrac{2x+4+9m^2}{8-27m^3}-\dfrac{x+2}{4+6m+9m^2}=\dfrac{1}{2-3m}$. $\left[\dfrac{4}{3m}\right]$

147. $(a-x)^3-a(a-x)^2+x(a-x)=x(a-x)(1-a+x)$. $[a]$

148. $\dfrac{a(x+a)+b(x-b)}{(a+b)^2}=1$. $[2b]$

149. $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x+1}{a}=2x+\dfrac{1}{a}$. $\left[\dfrac{a}{3-5a}\right]$

150. $\dfrac{ax+b}{a}-\dfrac{bx+a}{b}=\dfrac{a+b}{ab}+1$. [impossibile]

151. $\left(\dfrac{4}{7}a+\dfrac{2}{5}b\right)(a-b)=5\left(\dfrac{3}{7}a-x\right)+2x+\dfrac{3}{5}a^2-\dfrac{15a+b^2}{7}$. $\left[\dfrac{(a+3b)^2}{105}\right]$

152. $\dfrac{2}{a-x}+\dfrac{3}{a+x}=0$. $[5a]$

153. $\dfrac{x-a}{x^2-1}\,\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{2a}{x-1}\,\dfrac{1}{2x}$. $[2a]$

154. $(a-x)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{x+a}{bx}\right)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{2x}{b}$. $[b-a]$

155. $\dfrac{(a+x)^2}{a^2-x^2}+\dfrac{(a-x)^2}{x^2-a^2}=\dfrac{a-x}{a+x}+\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$. $\left[\dfrac{a}{8}\right]$

156. $\dfrac{\dfrac{4}{x-a}+\dfrac{3}{x+a}}{\dfrac{2}{x^2-a^2}}=a$. $\left[\dfrac{a}{7}\right]$

157. $\dfrac{x-3}{b+2}+\dfrac{x-2}{b+6}=\dfrac{x}{b+4}$; $x=5$. [6]

158. $\dfrac{x-3}{b+5}+\dfrac{x+1}{3b+5}=\dfrac{2x-6}{b+3}$; $x=5$. [5]

159. $\dfrac{x-3}{b+6}+\dfrac{2x-8}{2b-9}=\dfrac{x-2}{b-1}$; $x=5$. $\left[\dfrac{56}{7}\right]$

160. $\dfrac{x-2}{b+7}-\dfrac{x-4}{2b+18}=\dfrac{1}{2b-2}$; $x=1$. [impossibile]

161. $\dfrac{b}{x}-3x=1$; $x=2$. [14]

162. $b+\dfrac{1}{3}x=\dfrac{2}{5}x+1$; $x=15$. [2]

163. $\dfrac{x-1}{b+1}-\dfrac{2x+3}{b-1}=\dfrac{x}{b^2-1}$; $x=1$. $\left[-\dfrac{6}{5}\right]$

164. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{x}{5}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{5}+\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{11}{60}$; $x=-1$. [0]

165. $\dfrac{2b(b-1)x}{3}=10b^2+\dfrac{2(4b+17)}{5}x$; $x=15$.

166. $(2b-1)x+b(x+5)-1=0$; $x=-2$. [1]

167. Nell'equazione $2(x+2b)-1=3(b-2)$ calcolare i valori da attribuire a b in modo che

1. la soluzione sia $x=3$; [−11]
2. la soluzione abbia lo stesso valore di b; [−5/3]
3. il valore di b superi di 2 quello della soluzione; [−1/3]
4. la soluzione e b abbiano valori opposti; [5]
5. il valore della soluzione superi di 1 quello di b. [−7/3]

Equazioni contenenti valori assoluti

Risolvere le seguenti equazioni.

Esempi:

$$|x| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \text{ o } \ -x = 3$$

da cui $x = 3,\ x = -3$;

$$|x| + 3 = 8$$

l'equazione è equivalente a $|x| = 5$ da cui $x = 5$, $x = -5$;

$$|x+1| = -5$$

l'equazione è impossibile essendo $|x+1| > 0$ qualunque sia x.

$$|x+4| = |5-x|$$

$$x + 4 = 5 - x \quad \text{o} \quad x + 4 = -(5-x)$$

da cui $2x = 1$ o $4 = -5$ impossibile

$$x = \frac{1}{2}$$

168. $|5x| = 25$; $|8x| = -64$; $\left|-\frac{1}{2}x\right| = 2$.

169. $|5x| - 3 = 7$; $|5x-1| = 8$; $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| = \frac{1}{8}$.

170. $|1,5x| + |-7| = 16$; $|3x-2| = |7x+8|$.

171. $\left|\frac{1}{2}t - 3\right| + |t| = 1$; $|2t-1| = t^2$.

172. $\left|\frac{1}{5}y + \frac{1}{3}\right| = |y-1|$; $\left|\frac{5}{6} - \frac{11}{5}y\right| = \left|y - \frac{1}{4}\right|$.

173. $\left|\frac{13}{11} + \frac{2x}{3}\right| = \frac{11}{12}$; $|3x+5| = \left|1 - \frac{1}{4}x\right|$.

174. $|y+1| + |-2+y| = 4$; $|3t-1| = t^2$.

175. $\left|\frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right|$.

176. $|x-2| = |x-1| + 5$; $\left|\frac{5}{4}b - \frac{1}{8}\right| + |1-b| = 0$.

177. $|1+|x|| = |2-x| + 3$.

178. $\left|(x+1)^2 + 2x - x^2\right| = |x|$. $\left[-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{5}\right]$

179. $\left|2x - \frac{2x}{a}\right| = 4a-1 \quad a>1$. $\left[\frac{a(4a-1)}{2(a-1)}\,;\frac{a(1-4a)}{2(a-1)}\right]$

180. $|2(x-3) + x + 7| = 2 - (x+1)$. $[-1\,;0]$

181. $\left|(x+2)^2 - (x-1)^2\right| = 3(x+4) + 4(x-3)$. $\left[3\,;-\frac{3}{13}\right]$

182. $|2(3x+1) - 5(x+1) + 3| = \left|(x+1)^2 - (x^2-2)\right| + 1$. $[-4\,;-2]$

Disequazioni di primo grado

183. $5x-3>0$; $7x-1>0$; $4x+9 \geq 3$.

184. $2x+21 \geq -5$; $5x+4<9$; $10>2x$.

185. $3x-2<0$; $-3x-21<5$; $x+3>12$.

186. $2x-1<\frac{5}{2}$; $4x+2>x+15$; $x-3 \geq \frac{5-x}{2}$.

187. $\frac{1}{4}(x-8) + \frac{1}{3}(x+3) < x+12$; $(x-2)^2 > (x-1)^2 + 5$.

188. $\frac{2}{3}x + 3 > \frac{4}{3}x - 1$; $\frac{3}{4}x - 2 < \frac{1}{4}x + 2$.

189. $\frac{3}{4}x - 4 \leq \frac{1}{3}x + 1$; $4(x-2,5) - 3(3x-1,5) < 2(x-1,25)$.

190. $(x-2)^2 - (x+1)^2 < \frac{1}{2}x - 10$. $[x>2]$

191. $x - \frac{x+3}{2} > 3 + \frac{1-x}{3}$; $2(x-4) + 8 > x + 4$. $\left[x>\frac{29}{5}\,;x>4\right]$

192. $8(x-1)+3(x+2)>3(x-2)+7(x+1)$. $[x>3]$

193. $4(x-3)^2-(2x-1)^2<35$. $[x>0]$

194. $4(x+3)-5(x-1)^2>25x-5(x+4)^2$. $\left[x>-\frac{87}{29}\right]$

195. $3x(x-3)^2+2x(9x-1)-3x^3>0$. $[x>0]$

196. $(2x-1)^2+x-3-\frac{1}{2}<2x(2x+1)-\frac{2x-1}{2}$. $\left[x>-\frac{3}{4}\right]$

197. $\frac{1}{2}x+\frac{1+x}{3}<4-x$. $[x<2]$

198. $2(x-4)>x+4$. $[x>12]$

199. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-2x>\frac{1}{2}x-2$. $\left[x<\frac{11}{13}\right]$

200. $4(x-2,5)-3(3x-1,5)>5-2(x-0.25)+x$. $\left[x<-\frac{11}{4}\right]$

201. $-\frac{1-x}{3}-\frac{2-3x}{4}>\frac{1}{15}$. $\left[x>\frac{54}{65}\right]$

202. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x-3\right)\right]-3\right\}-3>x$. $\left[x<-\frac{333}{80}\right]$

203. $2x-\frac{x-1}{2}<x-1$. $[x<-3]$

204. $2(0.8x-0.2)+1>1.4(0.5x+0.4)$. $[x>-0.044]$

205. $(x-1)(x+1)-(x-2)^2>4$. $\left[x>\frac{9}{4}\right]$

206. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)-2x(x+1)>\frac{1}{3}x$. $\left[x>\frac{5}{28}\right]$

207. $(x-2)^2-2x>(x-2)(x+2)+5$. $\left[x<\frac{1}{2}\right]$

208. $5(x+1)-(1-x)(x+1)>(x+3)^2$. $[x<-5]$

209. $\frac{x(3x-5)}{2} > \frac{(3+6x)(x-1)}{4}$. $\left[x<\frac{3}{7}\right]$

210. $-\frac{1-x}{3} - \frac{2-3x}{4} > \frac{1}{12}$. $\left[x>\frac{11}{13}\right]$

211. $\left[-\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}(3-x)\right] : \left(-\frac{3}{4}\right) < -\frac{4}{3}(x-1)^2 - x(x+1)$.

212. $\frac{1}{12} > \left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-x\right)\right] + \frac{5-3x}{6}$.

213. $\frac{2}{3} - \frac{5x-15}{3} > 25-5x$. $\left[x>\frac{58}{10}\right]$

214. $\frac{7}{5}x + 2(x-1)(x+1) > 2x^2 - 1 + 3x$. $\left[x<-\frac{5}{8}\right]$

215. $\frac{4}{5}(x+1) - \frac{1}{6}(x-1) < x+3$. $\left[x>-\frac{61}{11}\right]$

216. $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 2x\right] + 1 < \frac{7}{5}x + 2$. $\left[x>-\frac{30}{77}\right]$

217. $\frac{(x-1)(x-2)}{2} < \frac{x-2}{2} + 2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$. [impossibile]

218. $(x+1)(2x+3) - (2x-1)(x-3) > 3(x-2)$. $\left[x>-\frac{2}{3}\right]$

219. $2x(x-1)^2 + 2x(2x-1) - 2x^3 > 1$. [impossibile]

220. $\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1\right)^2 < x^2\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{2} + 2x - 1$. $[x<-2]$

221. $0.\overline{3}x + \frac{1}{2}x - 1 > 0$. $\left[x>\frac{6}{5}\right]$

222. $\frac{1}{3}x - 2x + 0.\overline{7} < 4$. $\left[x>-\frac{29}{15}\right]$

223. $\frac{\left(2x^2+x+1\right)^2}{4} - \frac{1-5x}{8} > \left(x^2-x-1\right)^2 + \frac{3x^2(4x+3)}{4}$. $[x<-1]$

224. $\frac{(3x+1)^3}{9}+(2x-1)^2>3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3+\frac{(2x+1)^2}{4}-\frac{1-x}{36}.$ $[x<0]$

225. $\frac{(x-1)^3}{4}+\frac{3(x+1)}{2}<\frac{1}{4}\left\{\left[(x+1)^2-(5x+1)\right]x+2\right\}-1.$ $\left[x<-\frac{7}{9}\right]$

226. $\left(x^2+2x+4\right)(x+2)-4x(x-13)<10-(2-x)^3+6x^2.$ $\left[x<-\frac{1}{8}\right]$

227. $x(x-4)(x+4)-(x-3)^3<9x(x-3)-5(2-x)+3.$ $\left[x>\frac{34}{21}\right]$

228. $2\left(x^2-2x-3\right)^2+10x\left(x^2-3\right)+2\left(5+x^2\right)\left(5-x^2\right)>20+2x(x-1)^2.$

$[x<6]$

229. $\frac{(2x+3)^3}{4}+2\left[x+4-\frac{1}{2}(2x+5)\right]^3<\frac{(2x+3)\left(4x^2-6x+9\right)+(6x+3)}{4}$

$[x<-1]$

230. $x\left\{4(3x+1)-\left[(x+3)^2+(3-x)^2\right]\right\}>2(2-x)^3.$ $\left[x>\frac{8}{5}\right]$

231. $x(x+0.2)-2x\left(3.5+\frac{1}{2}x\right)-0.4<x+0.\overline{1}.$ $\left[x>-\frac{23}{351}\right]$

232. $\frac{2x-1}{4}+2x>\frac{x+1}{2}-\frac{11}{4}.$ $[x>-1]$

233. $\frac{x-1}{2}+\frac{2(x+1)}{3}<\frac{x+2}{2}-\frac{13}{6}.$ $[x<-2]$

234. $2(x+a)-3(x+b)<0.$ $[x>2a-3b]$

235. $(2a-b)(x+a)-(2a+b)(x-a)>4a,\quad b<0.$ $\left[x<-\frac{2a(a-1)}{b}\right]$

236. $(a-b)x+(a+b)x<2a,\quad a<0.$ $[x>1]$

237. $a(2x-1)-2x(a-1)<0.$ $\left[x<\frac{a}{2}\right]$

238. $4(2a+x)(x-3)+4(a-x)(x-1)>12a(a-3).$ $[x>a]$

239. $(1+b)\left[(x-1)^2-1\right]-(1-b)\left[(x-b)^2-b^2\right]+10<2bx^2.$ $\left[x>\dfrac{5}{b^2+1}\right]$

240. $\dfrac{x-a}{a-1}-\dfrac{x^2-a^2-1}{a^2-1}<\dfrac{2-x^2}{a^2-1}-\dfrac{x-1}{a+1}+2, \quad a>1.$ $\left[x<\dfrac{a^2+a-1}{a}\right]$

241. $\dfrac{x+a}{1+\dfrac{1}{a}}+\dfrac{x+1}{2}<a+1, \quad a>-1.$ $\left[x<\dfrac{-a(a-1)}{3a+1}\right]$

242. $\dfrac{x^2-a^2}{a}+\dfrac{x}{a}-\dfrac{x^2-1}{a}-x<\dfrac{2-2a^2}{a}.$ $[x<1+a]$

243. Se $a>b$, dimostrare che $2a>a+b$.

244. Se $2a\leq 3b$, dimostrare che $4a\leq 2a+3b$.

245. Se $a<b$, dimostrare che $5a+3b<3a+5b$.

246. Se $a\geq 3b$, dimostrare che $3a-b\geq a+5b$.

Disequazioni in cui figurano valori assoluti

Posto $a>0$, risulta

$$|x|\leq a \quad \text{se e solo se} \quad -a\leq x+5\leq a$$

$$|x|\geq a \quad \text{se e solo se} \quad x\leq -a \ \text{ o } \ x\geq a\,.$$

Risolvere le seguenti disequazioni.

Esempi:

$$|x+5|<1 \quad \Rightarrow \quad -1<x+5<1;$$

Sottraendo poi 5 a tutti i membri:

$$-6<x<-4.$$

$$|3x|+2>5$$

$$|3x|>3 \quad \Rightarrow \quad 3x<-3 \quad \text{o} \quad 3x>3\,;$$

dividendo per 3;

$$x<-1 \ \text{ o } \ x>1\,.$$

247. $|3x|<1$; $|3x+1|<5$; $\left|\frac{1}{2}(x+1)\right|<\frac{1}{4}$.

248. $|x-5|<10$; $|x-0,1|<0,9$; $\left|x-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{7}$.

249. $|5x|+1<6$; $|-3x|<2$; $|2x-5|\leq\frac{1}{4}$.

250. $|3x+6|>0$; $|x|-1<0$; $|1-5x|<0$.

251. $|5x+2|<|3x-4|$; $\left|\frac{11}{3}-3x\right|>\frac{3}{2}$; $|5-4x|\geq|-3|$.

252. $|5x+1|>1$; $\left|x-\frac{1}{4}\right|>5$; $|x+3|\leq 6$.

253. $\left|\frac{13}{2}-\frac{1}{7}x\right|<|-5|$; $\left|\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}\right|>|-4|$; $|7x+1|\leq\frac{1}{3}$.

254. $|x+2|>2$; $|x|+2>1$; $\left|x+\frac{1}{2}\right|>|2x-1|$.

255. Dimostrare che per ogni numero reale x vale:

$$-|x|\leq x\leq|x|.$$

256. Dimostrare la disuguaglianza triangolare:

$$|x+y|\leq|x|+|y|.$$

Suggerimento

Si distinguano i due casi $x+y\geq 0$ e $x+y<0$, e si applichi la disuguaglianza dell'esercizio precedente si per x che per y.

Utilizzando la disuguaglianza triangolare dimostrare che:

257. Se $|x-3|<\frac{1}{3}$ e $|y+3|<\frac{1}{5}$ allora $|x+y|<\frac{8}{15}$.

258. Se $|x-5|<\frac{1}{2}$ e $|y-5|<\frac{1}{7}$ allora $|x+y|<\frac{9}{14}$.

259. Dimostrare che se $a<b$ la media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ è compresa tra a e b, cioè $a<\frac{a+b}{2}<b$.

Problemi risolubili mediante equazione di primo grado

260. Dividere il numero 400 in due parti tali che l'una sia i $3/5$ dell'altra. [250, 150]

261. Trovare un numero sapendo che i $4/5$ di esso, aumentati di 8, equivalgono ai $2/3$ del numero stesso aumentati di 20. [90]

262. Trovare un numero sapendo che i $2/7$ di esso, aumentati del numero stesso, equivalgono al doppio del numero diminuito di 5. [7]

263. Trovare quattro numeri consecutivi la cui somma sia uguale a 14. [2, 3, 4, 5]

264. Trovare tre numeri dispari consecutivi la cui somma sia 249. [81, 83, 85]

265. Un capitale di L. 5 000 000 viene impiegato parte al 9% e parte all'11%. Sapendo che dopo un anno si è avuto un interesse di L.480000, determinare quale parte di capitale è stata impiegata al primo tasso e quale al secondo. [3500000, 1500 000]

266. Una fabbrica di calcolatori ha prodotto 10.950 esemplari in un trimestre. Determinare le varie produzioni mensili sapendo che ogni mese è stato prodotto un numero di calcolatori pari al 70% di quelli del mese precedente. [5000, 3500, 2450]

267. In una proporzione la somma dei termini è 65. Sapendo che ciascuno dei termini è i $2/3$ del precedente, scrivere la proporzione. $[27:18=12:8]$

268. Una sala rettangolare ha il perimetro di m 72.5. Trovare le due dimensioni sapendo che l'una è $2/3$ dell'altra. [m 21.75; m 14.5]

269. In un rettangolo la base è i $15/8$ dell'altezza. Si calcolino l'area e la diagonale, sapendo che il perimetro è m 86.85. $[m^2\,427.64;\ m32.09]$

270. La distanza fra i centri di due cerchi tangenti esternamente è cm 16,8. Calcolare i raggi dei due cerchi sapendo che il rapporto fra le circonferenze è di $7/3$ [cm 11.76; cm 5.04]

271. Trovare il perimetro di un trapezio rettangolo sapendo che la somma della base maggiore e del lato obliquo è m 15,62, che quest'ultimo è m 1,5 più lungo della base minore, che la differenza tra la base maggiore e la minore è m 3,5.

272. Trovare il lato di un quadrato, sapendo che se si aumenta di b metri il suo lato la superficie aumenta di a^2 metri.

$$\left[\frac{a^2-b^2}{2b}\right]$$

273. Trovare tre numeri pari consecutivi la cui somma è 60.

[18, 20, 22]

274. Un salvadanaio contiene L. 9.400 in monete da L. 100 e L. 500. Calcolare il numero di monete dei due tipi sapendo che complessivamente esse sono 74.

[69; 5]

275. Il signor Rossi ha investito la somma di L. 25.000.000 in due titoli che rendano rispettivamente un interesse semplice annuo del 7,5% e del 10,3%. Alla fine dell'anno gli vengono corrisposte L. 2 463 000 di interessi complessivi. Quanto denaro è stato investito in ciascuno dei due titoli? [4000000; 21000000]

276. In un'azienda le ore di lavoro straordinario vengono pagate una volta e mezzo. Un impiegato che guadagna L. 8.500 l'ora riceve a fine mese uno stipendio di L. 2.176.000. Quante ore di lavoro straordinario ha cumulato durante il mese l'impiegato, sapendo che l'orario settimanale complessivo è di 40 ore? [64]

277. La temperatura in gradi Fahrenheit corrispondente ad una certa temperatura espressa in gradi Celsius può essere ottenuta aumentando di 32 i $9/5$ di quest'ultima. Determinare la temperatura in cui le letture eseguite sulle due scale Celsius e Fahrenheit coincidono. [-40°]

278. A causa dell'inflazione un Kg di pane aumenta una prima volta del 15% e a distanza di un anno di un altro 10%. Se dopo i due

rincari un Kg di pane costa L. 1250, quanto costava prima degli aumenti? [L. 1000]

279. Francesco e Antonio fanno 5 partite a carte, aumentando ogni volta la posta in gioco di L. 500 rispetto alla precedente. Sapendo che Francesco ha vinto le prime 3 partite, mentre Antonio le ultime 2 e che alla fine sono in pari, quanto era la posta alla prima partita? [L. 2000]

280. Due ciclisti A e B partono da uno stesso posto e vanno nella stessa direzione; sapendo che A parte un'ora dopo B e che le velocità di A e B sono rispettivamente di 30 Km/h e 18 Km/h, determinare dopo quanti Km A raggiunge B. [45 Km]

281. In un concorso per l'assegnazione di posti da segretario le domande presentate dagli uomini sono il doppio di quelle presentate dalle donne. Se i posti disponibili sono pari al 5% delle domande presentate e se risultano vincitori il 3% degli uomini, qual è la percentuale delle donne vincitrici rispetto alle domande che hanno presentato? [9%]

282. La differenza dei quadrati di due numeri naturali che differiscono di 2 è uguale a 16. Trovare i due numeri. [3; 5]

283. Determinare le ampiezze di due angoli supplementari sapendo che la loro differenza è di 100 gradi.

284. Trovare le misure degli angoli di un triangolo ABC sapendo che $\widehat{A}$ è i $^2/_3$ di $\widehat{B}$ e che $\widehat{B}$ è i $^3/_4$ di $\widehat{C}$. [40°; 60°; 80°]

285. Il perimetro di un rettangolo è m 34. Sapendo che un lato è i $^5/_3$ dell'altro, calcolare l'area e la diagonale. [m^2 67.73; m 12.39]

286. L'area di un triangolo rettangolo è m^2 77.76. Sapendo che un cateto è i $^3/_4$ dell'altro, calcolare il perimetro del triangolo. [m 43.2]

287. Il lato di un quadrato è m 12.24. Tracciando una corda parallela ad una diagonale, questa divide il quadrato in un triangolo e in un pentagono. Sapendo che l'area del triangolo è $^9/_{23}$ di quella del pentagono, calcolare le aree e i perimetri del triangolo e del pentagono.

288. In un trapezio isoscele gli angoli che i lati formano con la base maggiore sono di 45°. La somma delle basi è m 9.8 e la base minore è $\frac{2}{5}$ della maggiore. Calcolare l'area del trapezio.

[m^2 20.58]

289. Il perimetro di un triangolo isoscele è m 48 e il lato è i $\frac{5}{6}$ della base. Calcolare l'area del triangolo.

290. Il perimetro di un parallelogrammo è di dm 60 e un lato è i $\frac{2}{3}$ dell'altro. L'altezza relativa al lato maggiore è di dm 10. Calcolare l'altra altezza del parallelogrammo. [dm 5.7]

291. In un rettangolo un lato è i $\frac{5}{6}$ dell'altro e il perimetro è di cm 264. Calcolare il lato del quadrato equivalente al rettangolo.

[$12\sqrt{30}cm$]

292. In un triangolo rettangolo la differenza dei cateti è di cm 8 e l'uno è i $\frac{4}{3}$ dell'altro. Calcolare l'area del triangolo. [384 cm^2]

293. Calcolare l'area di un rombo il cui perimetro è di m 624, sapendo che una diagonale è i $\frac{5}{12}$ dell'altra. [17280 m^2]

294. Se si aumenta un lato di un quadrato di m 4, l'area aumenta di m2 112. Qual è il lato del quadrato primitivo? [12 m]

295. In un trapezio rettangolo il lato obliquo è i $\frac{17}{15}$ dell'altezza ed è la metà della base maggiore. Calcolarne l'area, sapendo che il perimetro misura m 276.

296. In un trapezio rettangolo l'altezza e la base minore sono rispettivamente i $\frac{12}{13}$ e i $\frac{2}{3}$ del lato obliquo. Determinare l'area del trapezio, sapendo che il perimetro misura m 142.

[1162.5 m2]

297. Un trapezio isoscele ha il perimetro di m 33 e la base maggiore misura m 15. Sapendo che la base minore supera ciascun lato obliquo di m 3, calcolarne le misure.

[8 m; 5 m]

298. Le dimensioni di un rettangolo misurano m 24 e m 27. Una retta uscente da uno dei suoi vertici interseca una delle due basi maggiori scomponendo il rettangolo in un triangolo e in un trapezio. Calcolare la misura della base minore del trapezio, sapendo che l'area del triangolo è m^2 148.

299. Un mattone pesa un chilo e mezzo più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone? [3 Kg]

300. Trovare due numeri consecutivi tali che la loro somma sia uguale ai $7/4$ del minore più i $3/11$ del maggiore. [32; 33]

301. Calcolare l'età del padre e del figlio sapendo che quella del padre oggi è il doppio di quella del figlio e 10 anni fa la somma delle due età era uguale a quella attuale del padre. [40; 20]

302. Una persona entra in un negozio e spende la metà di quanto ha in tasca più L. 1.000. Poi entra in un secondo negozio e spende la metà di quanto gli è rimasto più L. 1000.; quindi entra in un terzo negozio e spende ancora la metà di quanto ha più L. 1.000. Calcolare quanto aveva in tasca all'inizio, sapendo che nell'ultimo negozio ha speso tutto ciò che gli rimaneva. [L. 14000]

303. I due candidati alla presidenza di una società hanno avuto complessivamente 574 voti. Il candidato eletto ha avuto 56 voti in più. Quanti voti ha avuto ciascun candidato? [259; 315]

304. Un negoziante alla fine del primo anno del suo commercio calcola che il suo capitale sarebbe stato raddoppiato se avesse guadagnato 15 milioni in più. Così accade pure alla fine del secondo e terzo anno. Alla fine del terzo anno ha un capitale che è $11/4$ di quello primitivo. Calcolare i guadagni annuali.

[15 mil.; 10 mil.; 20 mil.]

305. Dalla città A parte un'auto che percorre 280 Km in 5 ore. Dalla città B, situata 200 Km prima di A, 8 ore più tardi parte una seconda auto che percorre 200 Km in 3 ore. Dopo quanto tempo e a quale distanza da A la seconda macchina raggiungerà la prima?

[4480 Km; 72 ore]

306. L. 123.590 vengono divise a tre persone P., L., M. Se L. ha il doppio di M. più L. 10.000 e P. ha L. 20.000 in meno del triplo di L., calcolare quanto ha ciascuno.

[P. L. 79060; L. L. 33020; M. L. 11510]

307. Carla ha 46 anni e sua figlia Maria ne ha 12. Fra quanti anni l'età di Carla sarà tripla di quella di Maria? [5 anni]

308. I 30 alunni della quinta B decidono di organizzare una gita a Pompei. Sapendo che la somma necessaria è di L. 118.300 e la quota di ogni alunna è di L. 3.500 e di ogni alunno è di L. 4.200, quanti sono gli alunni e le alunne della quinta B? [11 alunne; 19 alunni]

309. Sottraendo ad un numero la sua metà e 3, si ottiene lo stesso risultato che quadruplicando il suo quinto diminuito di 6. Qual è il numero? [10]

310. Un venditore vende delle uova a L. 140 l'una. Nel portarle ne rompe 5, quindi decide di vendere le altre a L. 160 l'una per ricavare la stessa somma che avrebbe ricavato vendendole al prezzo iniziale. Quante uova aveva in partenza il venditore? [40]

311. Un venditore vende a due clienti una tela di 30,50 m. Poichè il secondo cliente ne vuole acquistare il doppio di quanto ne ha acquistato il primo, il negoziante deve aggiungere 5,50 m da un'altra tela. Quanta tela ha acquistato il primo cliente e quanti metri dalla tela iniziale ha acquistato il secondo? [12 m; 24 m]

312. Un numero di tre cifre ha la cifra delle unità doppia di quella delle decine, e quella delle centinaia doppia di quella delle unità. Trovare il numero, sapendo che la differenza tra il numero stesso e quello che si ottiene leggendolo al contrario (da destra verso sinistra) è 396. [824]

313. Qual è quel numero intero positivo tale che la differenza tra il cubo del suo consecutivo e il suo cubo è uguale al triplo del suo quadrato aumentato di 28? (Ne esiste anche uno negativo. Qual è?). [9; -9]

314. Le cifre di un numero di tre cifre sono tre numeri pari consecutivi la cui somma è 18. Trovare il numero. [468]

315. Trovare un numero tale che aumentato di 11 e diviso per $\frac{1}{3}$ del numero stesso dà per quoziente 8 e resto 1. [6]

316. Calcolare le lunghezze dei lati di un triangolo sapendo che il suo perimetro è di 84 m e che due dei suoi lati sono rispettivamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$ del terzo. [30 m; 9 m; 45 m]

317. In un rettangolo l'altezza supera di 12 cm la base, che è $\frac{3}{7}$ dell'altezza. Determinare perimetro e area del rettangolo.
[60 cm; 189 cm]

318. La somma delle diagonali di un rombo è cm 35; se si aumenta di cm 5 la diagonale maggiore e si diminuisce di cm 12 la minore, l'area diminuisce di cm2 112.5. Trovare la misura delle diagonali.
[20 cm; 15 cm]

319. In una circonferenza sono date due corde AB e AC perpendicolari tra di loro. AB è i $\frac{3}{4}$ del raggio e la differenza tra $\frac{1}{8}$ del raggio e $\frac{1}{9}$ della corda AB è cm 1. Si determinino le lunghezze del raggio e delle corde AB e AC.
[r=24 cm; AB=18 cm; AC=31.1 cm]

320. Trovare i lati del trapezio isoscele ABCD inscritto in una semicirconferenza di raggio 2, sapendo che il lato obliquo BC è i $\frac{2}{3}$ della diagonale AC.
[$AC \approx 3.3$; $BC \approx 2.2$; $CD \approx 2.4$; $AB \approx 4$]

321. Calcolare il perimetro di un triangolo rettangolo la cui area è cm2 875 ed il rapporto tra i cateti è $\frac{7}{5}$. [≈ 145.64]

322. In un triangolo il lato minore è pari alla differenza degli altri due aumentata di 8 cm, mentre il maggiore è pari alla somma del minore e del doppio del lato intermedio diminuita di 49 cm. Sapendo che il lato minore è $\frac{2}{5}$ del maggiore, calcolare il perimetro del triangolo. [118 cm]

323. Dividere un angolo retto in tre parti sapendo che l'ampiezza della maggiore è uguale alla somma delle altre due diminuita di 6 gradi e che l'intermedia è tripla della minore. [12°; 36°; 42°]

324. In un triangolo un angolo è i $\frac{2}{3}$ di un altro e il terzo è il doppio del primo. Determinare l'ampiezza di ciascun angolo.
[40°; 60°; 80°]

325. Il costo della seconda edizione di un libro è aumentato di L.900, mentre la terza edizione è aumentata ulteriormente di L.1200.

Calcolare il costo di ciascuna edizione sapendo che i $^2/_3$ della somma del costo della prima e della seconda edizione sono uguali ai $^{47}/_{38}$ del costo della terza edizione.

[L.20700; L.21600; L.22800]

326. Un fruttivendolo ha venduto x Kg di pere a 800 Lire/Kg, y Kg di arance a 900 Lire/Kg e z Kg di mele a 1200 Lire/Kg. Sapendo che il numero complessivo di chilogrammi di frutta venduta è 137, che il numero dei chili di arance supera di 2 Kg la semisomma degli altri due e che il numero dei chili di pere supera di 14 Kg la differenza tra quelli di arance e la metà di quelli di mele, calcolare l'intero incasso della giornata.

[L.137500]

327. Un automobilista compie un viaggio percorrendo nella prima tappa $^3/_{16}$ dell'intero percorso più Km 100, nella seconda $^{13}/_{40}$ della parte rimasta, nella terza Km 410 e completa, infine, il viaggio con una tappa uguale alla prima. Calcolare il numero di chilometri percorsi dall'automobilista. [Km 1600]

328. Un numero di due cifre ha la cifra delle decine che supera di uno quella delle unità. Invertendo l'ordine delle cifre risulta un numero uguale ai $^5/_6$ del precedente. Determinare il numero. [54]

329. La somma di tre segmenti AB, CD, EF è 26 cm; il segmento CD supera AB di 4 cm, il segmento EF supera AB di 6 cm. Calcolare la misura di ciascun segmento.

330. In un trapezio la base minore è $^4/_5$ della maggiore e questa è i $^{35}/_6$ dell'altezza. determinare le misure delle basi e dell'altezza del trapezio sapendo che l'area dello stesso è 1.155.

331. In un triangolo isoscele l'altezza è $^3/_5$ del lato, la somma di $^2/_3$ del lato con $^1/_4$ dell'altezza è 18 cm. Calcolare l'area del triangolo.

332. La base maggiore di un trapezio rettangolo è $\frac{4}{3}$ della minore e il doppio del lato obliquo. Calcolare le misure dei lati, sapendo che la misura del perimetro del trapezio è 380 cm.

333. In un trapezio isoscele la misura del lato obliquo è $\frac{5}{4}$ della misura dell'altezza, la misura della base minore è $\frac{2}{5}$ di quella del lato obliquo. Calcolare le misure dei lati, sapendo che la misura del perimetro è 250 m.

334. In una circonferenza di centro O è inscritto un trapezio isoscele avente la base maggiore coincidente con il diametro e ciascun lato obliquo lungo cm 15. Sapendo che il raggio della circonferenza supera di cm 8,5 la distanza del centro O dal lato obliquo del trapezio, calcolare l'area e la misura del perimetro del trapezio.