

Francesco A. Costabile

La Geometria di MatCos

1

Premessa.

La Geometria di MatCos è una geometria di tipo euclideo, dotata di uno strumento capace di rappresentarne un modello, con le dovute approssimazioni, in ambiente virtuale.

Con “tipo euclideo” si intende una teoria astratta ipotetico-deduttiva, in grado di dare una descrizione razionale e un’immagine di figure rappresentanti oggetti della realtà sensibile, se pure in un quadro di necessaria approssimazione, supportata dall’accuratezza.

Questa teoria, dunque, prevede i termini primitivi ed i relativi assiomi (postulati più specificatamente nel testo di Euclide), quindi le definizioni ed i successivi teoremi. Accanto a questa teoria, al fine di creare un modello interpretativo, significativo della realtà sensibile, c’è un ambiente di programmazione, denominato Matcos^{*}, il quale oltre a possedere le strutture generali di un linguaggio di programmazione, è dotato di comandi specifici relativi a concetti geometrici astratti, siano essi enti primitivi o assiomi o definizioni. In questo modo le dimostrazioni costruttive di teoremi, possono essere espresse con una sequenza di comandi dell’ambiente di programmazione, ovvero con un programma. L’esecuzione, poi, immediata e ripetuta fornisce la rappresentazione, nel modello virtuale, dell’oggetto geometrico.

Il passaggio successivo, dall’ambiente virtuale alla realtà sensibile, non pone grosse difficoltà di natura concettuale agli allievi; i quali, anzi, ne sono attratti e stimolati dai vari strumenti di stampa. Questa metodologia, dunque, non abdica allo spirito euclideo, ovvero al sistema ipotetico-deduttivo, e, nel contempo, facilita la rappresentazione nel reale, tradizionalmente resa possibile dall’uso manuale della riga e del compasso. La

^{*} L’ambiente di programmazione Matcos è stato implementato con la collaborazione del dr. Gianluca Tricoli. Per ottenere il software rivolgersi al prof. Francesco Costabile c/o Dipartimento di Matematica, Unical, cubo 30/A – via P. Bucci, 87036 Rende (CS) email: costabil@unical.it – tel. 0984 496489.

pratica della programmazione, poi, coniuga assai bene la deduzione logico-sequenziale, con il rigore linguistico, in un quadro di necessaria chiarezza di idee.

Introduzione alla Geometria di MatCos.

■ Prerequisiti.

- Nozioni elementari di aritmetica, algebra e logica comune.
- Alfabeto e lingua italiana.
- Il significato di alcune parole della Geometria di MatCos non sempre coincide con quello del linguaggio comune, tali circostanze saranno esplicitamente segnalate; inoltre ad alcune parole viene attribuito un significato “**primitivo**” cioè non definibile con altre parole.
- I comandi servono per rappresentare, in ambiente virtuale, il modello.

Nella seguente tabella sono riportati le **parole** e i **comandi primitivi**

Parole	Comandi
punto	punto;
linea	linea;
linea per due punti	linea(punto,punto);
(linea) retta	retta(punto,punto);
punto generico	punto_a_caso
piano	piano;
direzione	
verso (di direzione) e suo opposto	
precedere/seguire (secondo un verso)	
orario/antiorario	

■ Regola e comando di notazione 1°

Per denominare i punti si usano lettere dell'alfabeto maiuscole seguite dal simbolo “=”, così:

A=punto

A=punto;

esprimono, rispettivamente, il punto denominato A e il comando per la sua rappresentazione. Per esprimere invece un punto generico denominato P si usa:

P=puntoacaso; P=punto_a_caso;

Le linee si indicano con le lettere dell'alfabeto minuscolo, così

l=linea l=linea;

esprimono rispettivamente una linea denominata l ed il comando per la sua rappresentazione. Una linea per due punti si indica con linea(punto,punto) e il relativo comando con

linea(punto,punto);

■ Regola di linguaggio 2

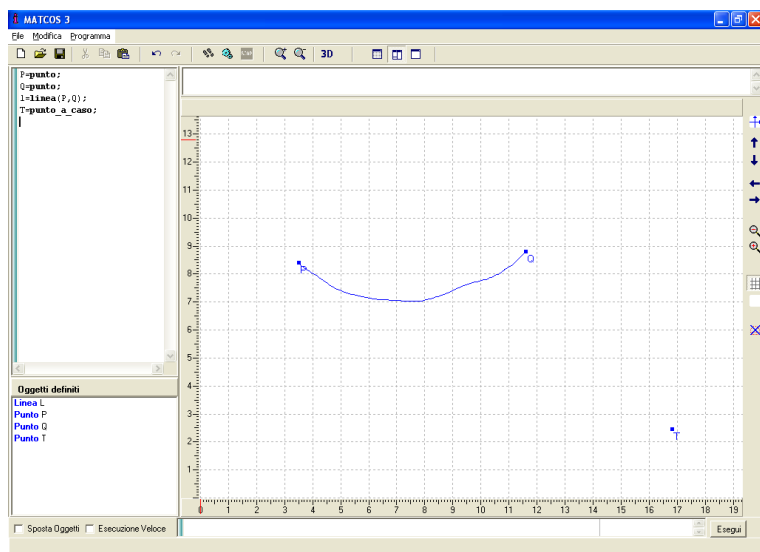
Espressioni del tipo: punto di una linea, linea che passa per un punto, linea che contiene un punto; punto appartenente ad una linea, sono da considerarsi equivalenti, cioè di uguale significato.

Esempio 1

Scrivere e rappresentare nel modello due punti P e Q, una linea, l, che passa per essi e un punto generico T.

Soluzione

Teorica	Computazionale
P=punto	P=punto;
Q=punto	Q=punto;
l=linea(P,Q)	l=linea(P,Q);
T=punto a caso	T=punto_a_caso;



■ Assioma 1

Il piano contiene infiniti punti e linee.

■ Assioma 2

Per due punti distinti passa una ed una sola linea retta, detta, d'ora in poi, semplicemente **retta**; essa individua una ed una sola **direzione** del piano e due **versi** di direzione uno opposto all'altro. La retta contiene infiniti punti distinti.

I comandi relativi all'assioma 2 sono:

retta(punto,punto);

per rappresentare la retta determinata da due punti;

e

punto_su(<retta>);

per indicare un punto su una retta; se si vuole un punto a caso il comando è

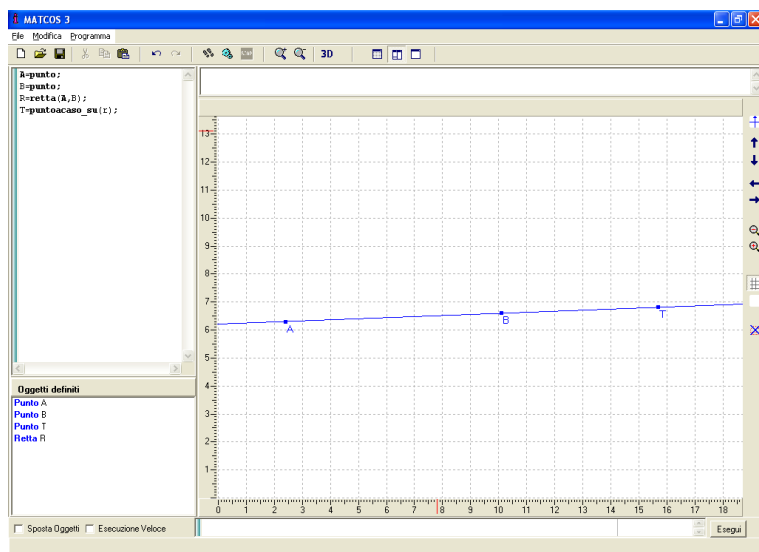
puntoacaso_su(<retta>);

Esempio 2

Scrivere e rappresentare nel modello due punti A e B, la retta, r, che essi definiscono e fissare il punto T su di essa:

Soluzione

Teorica	Computazionale
A=punto	A= punto ;
B=punto	B= punto ;
r=retta(A,B)	r= retta (A,B);
T=punto su (r)	T= puntoacaso _su(r);



■ Definizione 1 (Segmento)

Data una retta r e due punti A e B distinti su di essa, e supponiamo che A **precede** B secondo uno dei due versi, i punti di r che **seguono** A e precedono B secondo il verso fissato comprensivi dei punti A e B, costituiscono il **segmento** di **estremi** A (primo) e B (secondo).

■ Regola e comando di notazione 3

I segmenti si denotano con lettere minuscole. Il segmento di estremi A e B si denota con `segmento(A,B)`, mentre il comando per la sua rappresentazione nel modello è

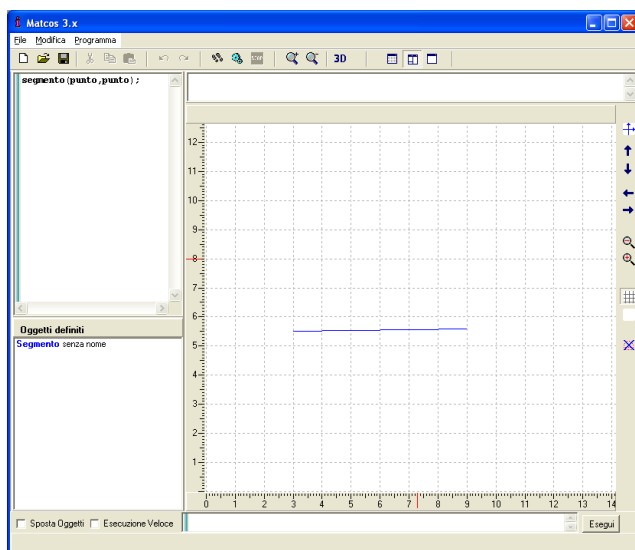
`segmento(A,B);`

Naturalmente se non sono specificati gli estremi si scriverà

`segmento(punto1,punto2)`

ed il relativo comando

`segmento(punto,punto);`



■ Regola e comando di linguaggio 4

Se abbiamo un segmento t e vogliamo denominare gli estremi, ad esempio, con C e D si scriverà:

$C=t.estremo(1)$ per il primo (da sinistra a destra)
 $D=t.estremo(2)$ per il secondo (da sinistra a destra)
 Come di consueto per i comandi si avrà:

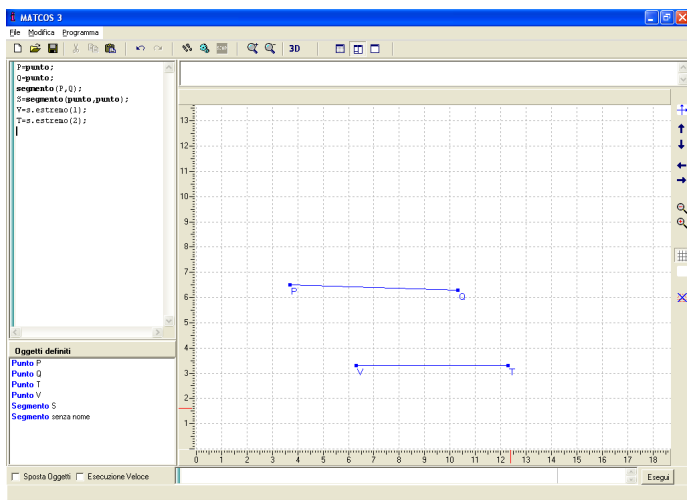
$C=t.estremo(1);$
 $D=t.estremo(2);$

Esempio 3

Scrivere e rappresentare il segmento di estremi P e Q; denominare con V e T gli estremi di un segmento, s.

Soluzione

Teorica	Computazionale
P=punto	P=punto;
Q=punto	Q=punto;
segmento(P,Q)	segmento(P,Q);
s=segmento(punto,punto)	S=segmento(punto,punto);
V=s.estremo(1)	V=s.estremo(1);
T=s.estremo(2)	T=s.estremo(2);



■ Regola di linguaggio 5

La direzione della retta cui appartengono gli estremi di un segmento si chiama anche direzione del segmento; in altre parole un segmento determina, anche, una direzione del piano, che è quella della retta cui appartengono gli estremi.

Esercizio 1

Rappresentare, nel modello, due segmenti con un estremo in comune. Tali segmenti sono detti **consecutivi**.

Esercizio 2

Rappresentare, nel modello, due segmenti con un estremo in comune ed aventi la stessa direzione. Tali segmenti sono detti **adiacenti**.

■ Assioma 3

Ad ogni coppia di punti A,B del piano è associato uno ed un solo numero reale chiamato loro distanza, indicato con **distanza(A,B)**, e che soddisfa le seguenti proprietà:

- a) $\text{distanza}(A,B) \geq 0$
- b) $\text{distanza}(A,B) = 0$ se e solo se A coincide con B
- c) $\text{distanza}(A,C) \leq \text{distanza}(A,B) + \text{distanza}(B,C)$ per ogni tre punti distinti A,B,C; valendo il segno di uguaglianza solo se i punti A,B,C appartengono alla stessa retta e A precede B che precede C.
- d) $\text{distanza}(A,B) = \text{distanza}(B,A)$

Il comando relativo all'assioma 3 è

distanza(punto,punto);

■ Regola di linguaggio 6

La distanza di due punti A e B di cui all'assioma 3 è anche chiamata misura del segmento(A,B) rispetto ad un'unità, che si suppone prefissata. La misura del segmento(A,B) si indica, perciò, con distanza(A,B).

■ Comando di notazione 7

Se si vuole conoscere il numero che rappresenta la distanza di due punti A,B o la misura del segmento(A,B) occorre il comando

Stampa("la distanza è ", distanza(A,B));

Naturalmente il numero stampato è un decimale finito, quindi può essere un'approssimazione, con la precisione nota, del valore esatto.

Esempio 4

Rappresentare due punti A,B e la misura del segmento(A,B).

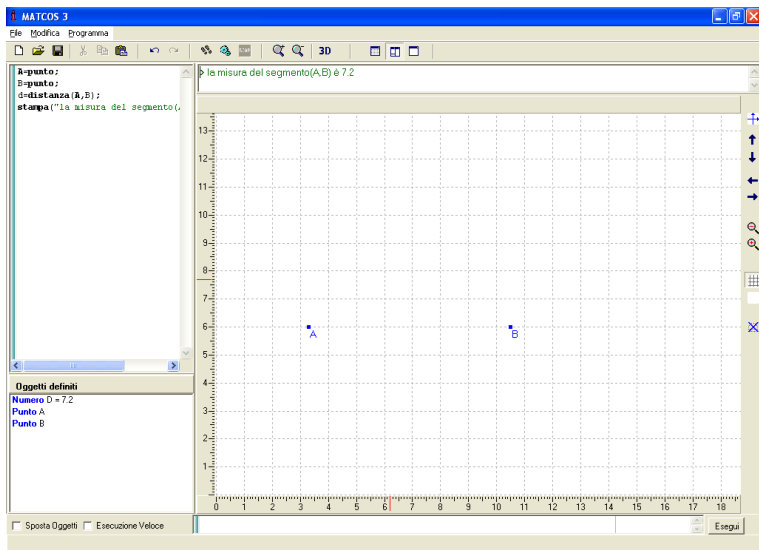
Soluzione computazionale

A=punto;

B=punto;

d=distanza(A,B);

stampa("la misura del segmento(A,B) è ", d);



■ Assioma 4

Dato un punto A ed un numero positivo m, esistono infiniti segmenti di estremo A e misura m.

Il comando che realizza l'assioma 4 è:

Segmento(punto,numero);

Esempio 5

Dato un punto A rappresentare due segmenti di estremo A e misura 5.

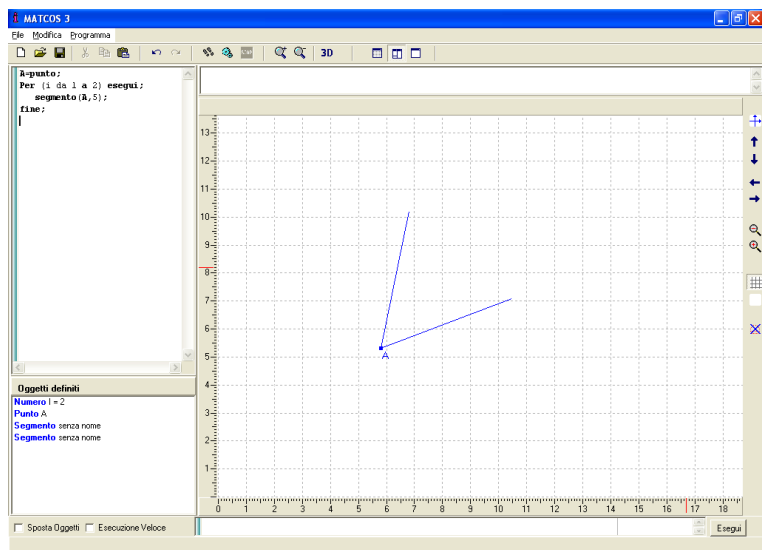
Soluzione computazionale

A=punto;

Per (i da 1 a 2) esegui;

segmento(A,5);

fine;



■ Assioma 5

Dato un punto A , un numero positivo m ed una direzione r , esistono due soli segmenti con un estremo in A , misura m e direzione r .

Il comando che realizza l'assioma 5 è:

Segmento(punto,numero,direzione);

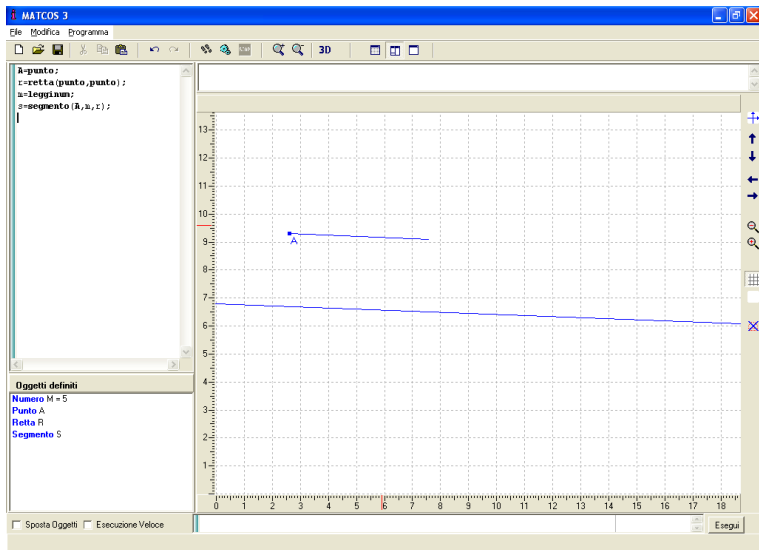
In fase di rappresentazione il comando chiede all'utente di scegliere uno dei due, in sostanza se l'estremo fissato sia il primo o il secondo.

Esempio 6

Dato il punto A , una retta, r , ed un numero positivo m , rappresenta un segmento di primo estremo in A , misura m e direzione r .

Soluzione computazionale

```
A=punto;  
r=retta(punto,punto);  
m=legginum;  
s=segmento(A,m,r);
```



Esempio 7

Rappresentare, nel modello, due segmenti consecutivi ed aventi la stessa misura.

Esercizio 3

Rappresentare, nel modello, due segmenti adiacenti ed aventi la stessa misura.

Esercizio 4

Rappresentare, nel modello, due segmenti consecutivi di misura uno doppia dell'altro.

Esercizio 5

Rappresentare, nel modello, 5 segmenti adiacenti di colore diverso e misura ciascuna doppia della precedente.

Esercizio 6

Dividere e rappresentare un segmento in n ($n > 1$) parti uguali.

■ Teorema 1

Dato un segmento di estremi A e B esiste su di esso uno ed un sol punto M tale che $\text{distanza}(A,M) = \text{distanza}(B,M)$.

Dimostrazione teorica

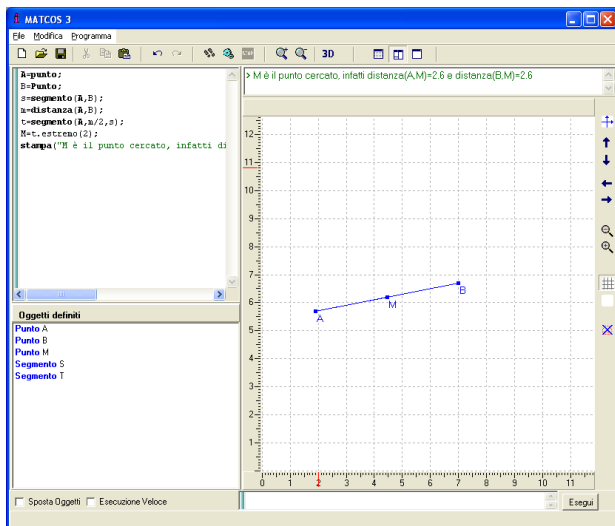
A=punto	notazione 1
B=punto	"
s=segmento(A,B)	definizione 1
m=distanza(A,B)	assioma 3
t=segmento(A,m/2,s)	assioma 5 e regola di linguaggio 5
M=t.estremo(2)	regola di notazione 4

M è il punto cercato.

computazionale

A= punto ;	comando di notazione 1
B= Punto ;	"
s= segmento (A,B);	comando di definizione 1

$m = \text{distanza}(A, B);$ comando di assioma 3
 $t = \text{segmento}(A, m/2, s);$ comando di assioma 5
 $M = t.\text{estremo}(2);$ comando di notazione
stampa("M è il punto cercato, infatti
 $\text{distanza}(A, M) = \text{distanza}(A, M),"$ e
 $\text{distanza}(B, M) = \text{distanza}(B, M);$



■ **Regola di linguaggio e comando 8**

Dato il segmento di estremi A e B, l'unico suo punto, M, tale che $\text{distanza}(A, M) = \text{distanza}(B, M)$ esistente ai sensi del Teorema 1 si chiama punto **medio** del segmento(A,B). Per rappresentare, nel modello, il punto medio di un segmento occorre il comando:

Punto_medio(<segmento>);

■ Teorema 2

Dati due segmenti s, t , di misura m e n esiste un segmento con un estremo coincidente con uno degli estremi di s o di t , misura $m+n$ e direzione coincidente con la direzione di s o di t .

Dimostrazione

```
A=punto;
B=punto;
S=segmento(A,B);

C=punto;
D=punto;
t=segmento(C,D);
m=distanza(A,B);
n=distanza(C,D);
q=segmento(B,m+n,s);
F=q.estremo(2);
stampa("il segmento
BF è quello richiesto");
```

Comando di notazione 1
"

Definizione 1 e comando di notazione 3

Comando di notazione 1
"

Definizione 1

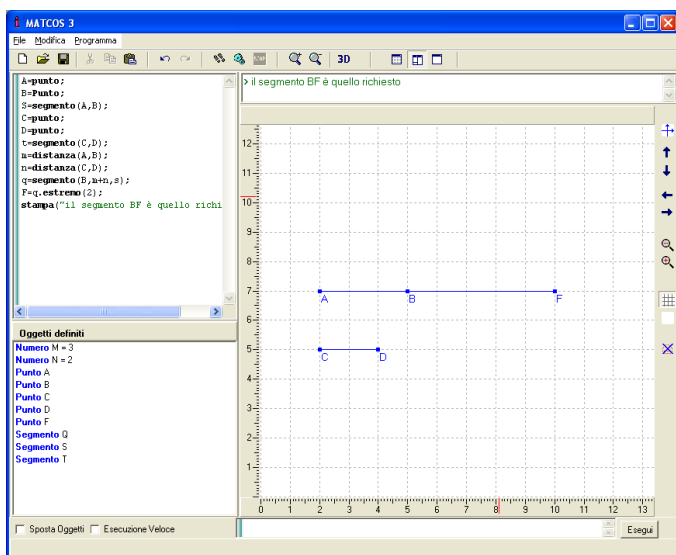
Assioma 3

"

Assioma 5

Comando di linguaggio 4

Comando di commento



■ Regola di linguaggio 9

Il segmento esistente ai sensi del Teorema 2, si chiama segmento somma di s e t .

Esercizio 7

Enunciare e dimostrare un teorema analogo al teorema 2, ma che dia il segmento “differenza”, ovvero il segmento di misura $m-n$ nel caso $m > n$ e $n-m$ nel caso opposto.

■ Regola di linguaggio 10

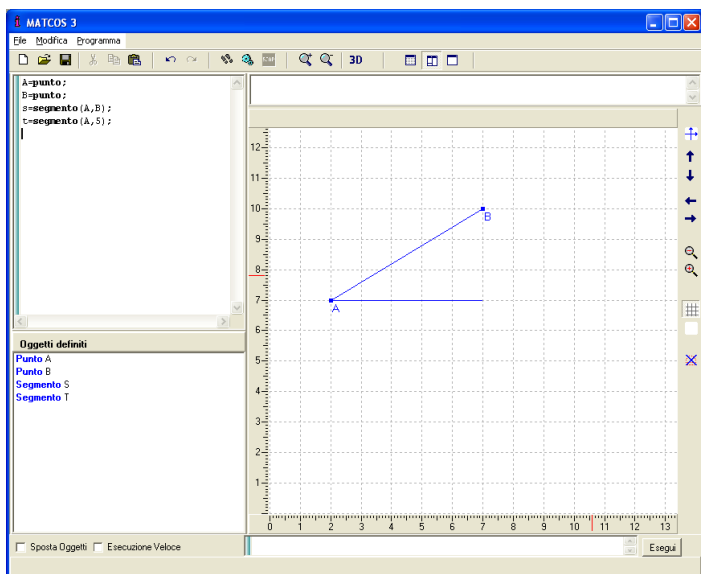
Due segmenti con un estremo in comune si chiamano consecutivi, se inoltre hanno la stessa direzione si chiamano adiacenti.

Esempio 8

Scrivere e rappresentare due segmenti consecutivi.

Soluzione

Teorica	Computazionale
$A = \text{punto}$	$A = \text{punto};$
$B = \text{punto}$	$B = \text{punto};$
$s = \text{segmento}(A, B)$	$s = \text{segmento}(A, B);$
$t = \text{segmento}(A, 5)$	$t = \text{segmento}(A, 5);$



■ Definizione 2 (semiretta)

Sia r una retta ed O un suo punto, l'insieme dei punti di r che seguono O secondo uno dei due versi fissato, incluso lo stesso O , si chiama **semiretta di origine O** . L'insieme dei punti che precedono O , secondo lo stesso verso, incluso il punto O , chiamasi **semiretta opposta** alla precedente. Per individuare univocamente una delle due semirette, occorre fissare un altro punto distinto da O ; così se A è un punto che segue O e B un punto che precede O secondo lo stesso verso fissato, si hanno la semiretta di origine O e contenente A e la semiretta di origine O e contenente B .

Il comando che definisce una semiretta è:

Semiretta(punto1, punto2);

ove punto1 rappresenta l'origine.

■ Regola di notazione 11

Per indicare la semiretta di origine O e contenente il punto A si usa la notazione

Semiretta(O,A).

Le semirette, al pari dei segmenti e delle rette, si denotano con le lettere minuscole. Così:

$r = \text{semiretta}(\text{punto1}, \text{punto2})$

indica la generica semiretta, denominata r, con l'origine in punto1.

■ Regola di linguaggio 12

La direzione della retta su cui giace una semiretta si dice anche direzione della semiretta.

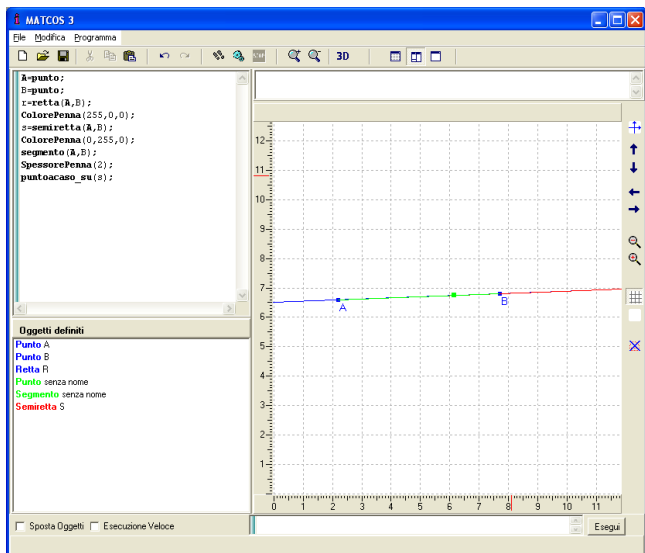
Esempio 9

Dati due punti A e B distinti:

- i) scrivere la retta da essi individuata e denominarla con r;
- ii) scrivere la semiretta di origine A e contenente B e denotarla con s;
- iii) scrivere il segmento di estremi A e B;
- iv) indicare un punto a caso su s.

Soluzione

Teorica	Computazionale
A=punto	A= punto ;
B=punto	B= punto ;
r=retta(A,B)	r= retta (A,B);
s=semiretta(A,B)	ColorePenna (255,0,0); s= semiretta (A,B);
segmento(A,B)	ColorePenna (0,255,0); segmento (A,B);
puntoacaso_su(s)	SpessorePenna (2); puntoacaso_su (s);



■ Regola di linguaggio 13

Chiamiamo **figura geometrica (piana)** o, semplicemente figura, ogni insieme di punti del piano.

■ Definizione 3 (Angolo)

Due semirette con l'origine in comune definiscono due figure geometriche, dette **angoli**; l'una contiene le semirette opposte a quelle date e si chiama, più propriamente, **angolo concavo**; l'altra si chiama, di contro, **angolo convesso**.

■ Regola di linguaggio 14

Dato un angolo, l'origine comune delle due semirette che lo definiscono, si chiama **vertice** dell'angolo; mentre le due semirette prendono il nome di **lati**, specificati, quando occorre, in primo e secondo da destra a sinistra, ovvero in verso antiorario.

■ Regola di comando 15

Il comando relativo alla definizione 3 è

angolo(<semiretta 1>,<semiretta 2>);

per l'angolo convesso e

angolo(<semiretta 2>,<semiretta 1>);

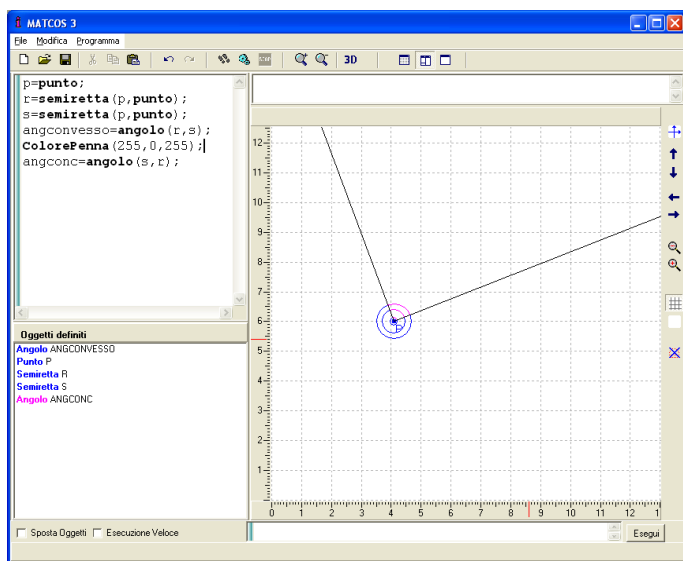
per l'angolo concavo.

Esempio 10

Rappresentare un angolo convesso e rispettivamente concavo.

Soluzione

```
P=punto;  
r=semiretta(P,punto);  
s=semiretta(P,punto);  
angconvesso=angolo(r,s);  
angconc=angolo(s,r);
```



■ Regola di comando 16

Poiché una semiretta è individuata da due punti distinti di cui uno è l'origine, per definire un angolo occorrono tre punti distinti, pertanto abbiamo il comando

angolo(punto1, punto2, punto3);

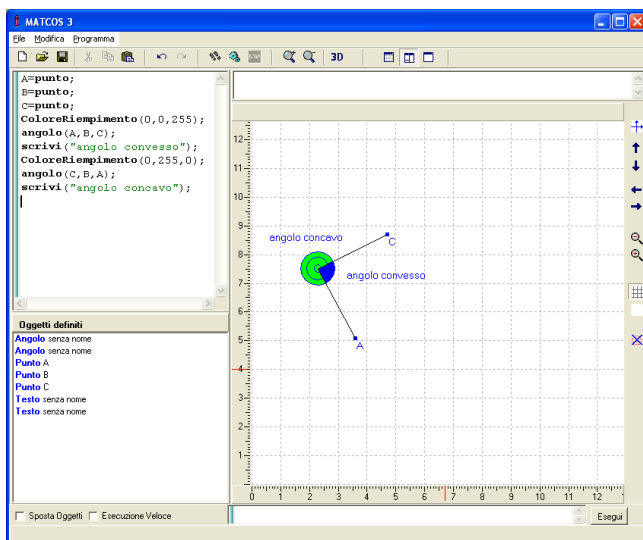
ove punto2 è il vertice e i lati sono le semirette (punto2, punto1) e (punto2, punto3). Scambiando la posizione di punto1 e punto3 si ottiene l'angolo convesso e rispettivamente concavo.

Esempio 11

Rappresentare un angolo convesso/concavo definito da tre punti non allineati.

Soluzione

```
A=punto;  
B=punto;  
C=punto;  
ColoreRiempimento(0,0,255);  
angolo(A,B,C);  
scrivi("angolo convesso");  
ColoreRiempimento(0,255,0);  
angolo(C,B,A);  
scrivi("angolo concavo");
```

■ Regola di comando 17

Assegnato un angolo denominato α , (mediante tre punti non allineati), se si vogliono denominare i lati, il comando necessario è:

$\langle \text{identificatore} \rangle = \alpha.\text{lato}(\langle \text{numero} \rangle);$

ove $\langle \text{numero} \rangle$ sta per 1 o 2 a seconda che si voglia il primo o il secondo lato.

Esempio 12

Assegnare un angolo mediante tre punti non allineati e denominare i lati.

Soluzione

Teorica

A=punto

notazione 1

B=punto

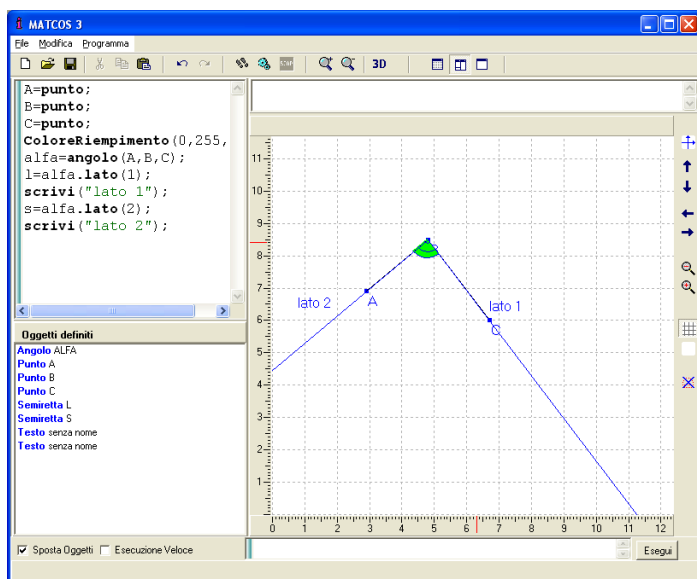
notazione 1

C=punto
 α =angolo(A,B,C)
l=semiretta(B,A)
s=semiretta(B,C)

notazione 1
Regola 14
definizione 3
"

Computazionale

```
A=punto;  
B=punto;  
C=punto;  
ColoreRiempimento(0,255,0);  
alfa=angolo(A,B,C);  
l=alfa.lato(1);  
scrivi("lato 1");  
s=alfa.lato(2);  
scrivi("lato 2");
```



■ Regola di linguaggio 18

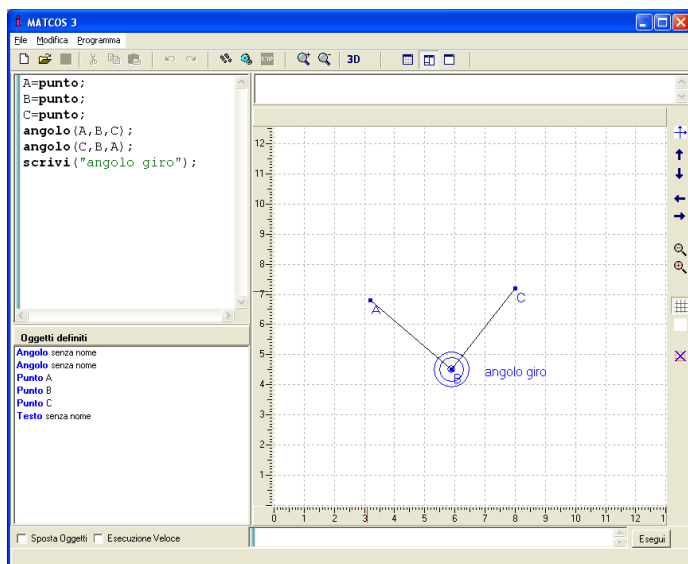
Si chiama angolo giro la figura formata da un angolo convesso e dall'angolo concavo avente lo stesso vertice.

Esempio 13

Rappresentare un angolo giro.

Soluzione

```
A=punto;  
B=punto;  
C=punto;  
angolo(A,B,C);  
angolo(C,B,A);  
scrivi("angolo giro");
```



■ Assioma 6

Ad ogni angolo è associato uno ed un solo numero non negativo, chiamato sua **ampiezza** o misura; si assume che l'angolo giro ha ampiezza pari a 360 gradi e l'angolo i cui lati coincidono ha ampiezza 0 gradi.

■ Definizione 4

L'unità di misura, nel sistema sessagesimale, per gli angoli è il grado ($^{\circ}$), pertanto un grado è pari alla 360-esima parte dell'angolo giro. I sottomultipli del grado sono i primi ($'$) e i secondi ($''$), naturalmente $60' = 1^{\circ}$ e $60'' = 1'$.

■ Regola di comando 19

Per ottenere la misura di un angolo specificato in gradi, primi e secondi il comando è:

$\langle \text{identificatore} \rangle = \mathbf{Ampiezza}(\langle \text{angolo} \rangle);$

che restituisce, in un unico risultato, la misura dell'angolo espressa in gradi, primi e secondi.

Se invece si vuole conoscere il singolo valore, rispettivamente, dei gradi, primi o secondi si possono utilizzare i comandi:

$\langle \text{identificatore} \rangle = \mathbf{Gradi}(\langle \text{angolo} \rangle);$

$\langle \text{identificatore} \rangle = \mathbf{Primi}(\langle \text{angolo} \rangle);$

$\langle \text{identificatore} \rangle = \mathbf{Secondi}(\langle \text{angolo} \rangle);$

Esempio 14

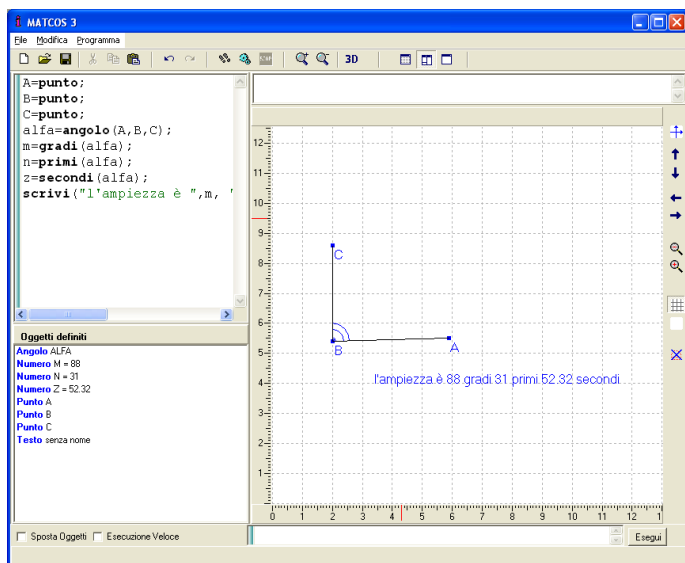
Rappresentare un angolo e rilevarne la misura.

Soluzione

```
A=punto;  
B=punto;  
C=punto;  
alfa=angolo(A,B,C);  
m=gradi(alfa);  
n=primi(alfa);  
z=secondi(alfa);  
scrivi("l'ampiezza è ",m," gradi ",n," primi ",z,"  
secondi");
```

oppure, utilizzando il comando **Ampiezza**:

```
A=punto;  
B=punto;  
C=punto;  
alfa=angolo(A,B,C);  
m=ampiezza(alfa);  
scrivi("l'ampiezza è ",m);
```



■ Assioma 7

Dato un numero reale positivo m (espresso in gradi, primi e secondi) ed una semiretta di origine O , esistono due soli angoli di vertice O , ampiezza m , e la semiretta assegnata come 1° , rispettivamente 2° lato. Se la semiretta assegnata è intesa come 1° lato, l'angolo ottenuto si dice **antiorario**, nel caso contrario (2° lato) in senso **orario**.

Il comando associato all'assioma 7 è:

angolo(<semiretta>,<numero>,<verso>);

ove <semiretta> è la semiretta assegnata;

<numero> è il numero assegnato che rappresenta l'ampiezza

<verso> sta per antiorario (la semiretta 1° lato) od orario (la semiretta 2° lato).

Esempio 15

Assegnata una semiretta di origine O , rappresentare l'angolo avente ampiezza 30° e la semiretta come primo e rispettivamente secondo lato.

Soluzione

O=punto;

r=semiretta(O, punto);

ColoreRiempimento(0,255,255);

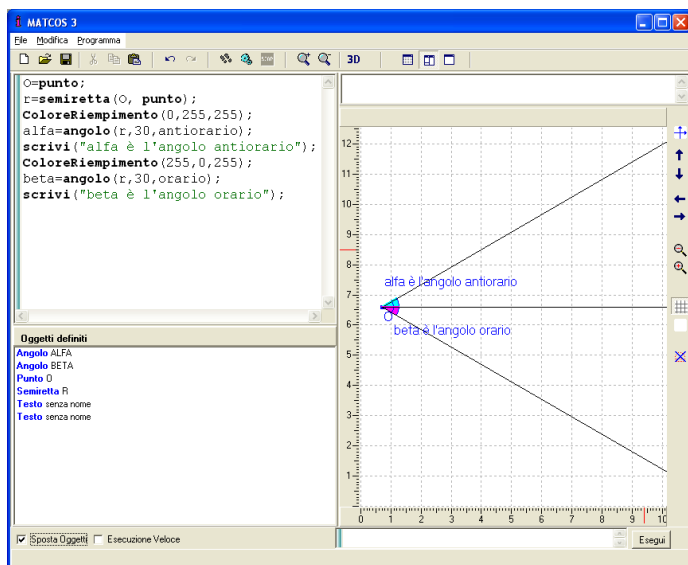
alfa=angolo(r,30,antiorario);

scrivi("alfa è l'angolo antiorario");

ColoreRiempimento(255,0,255);

beta=angolo(r,30,orario);

scrivi("beta è l'angolo orario");



■ Regola di linguaggio 20

L'angolo

- 1) metà dell'angolo giro (ovvero 180°) si chiama angolo **piatto**;
- 2) quarta parte dell'angolo giro (ovvero 90°) si chiama angolo **retto**;
- 3) minore dell'angolo retto si chiama **acuto**;
- 4) maggiore dell'angolo retto si chiama **ottuso**.

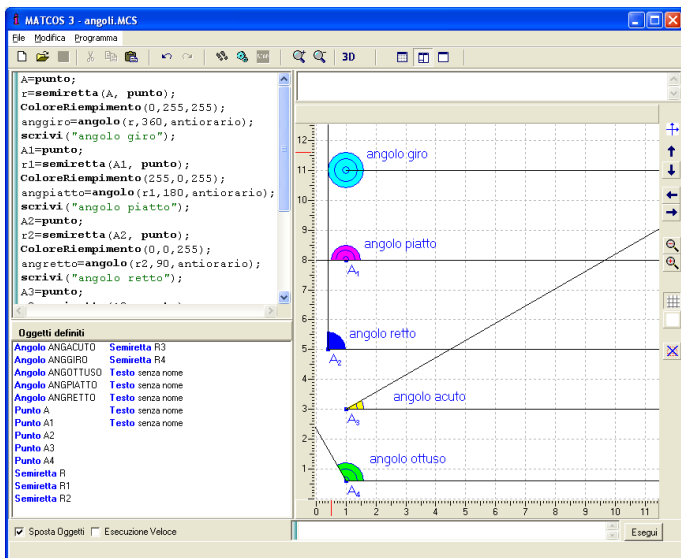
Due angoli con il vertice in comune si chiamano **consecutivi**, se poi il secondo lato giace sulla semiretta opposta a quella su cui giace il primo, si chiamano **adiacenti**.

Esempio 16

Rappresentare tutti gli angoli denominati nella regola precedente.

Soluzione

```
A=punto;
r=semiretta(A, punto);
ColoreRiempimento(0,255,255);
anggiro=angolo(r,360,antiorario);
scrivi("angolo giro");
A1=punto;
r1=semiretta(A1, punto);
ColoreRiempimento(255,0,255);
angpiatto=angolo(r1,180,antiorario);
scrivi("angolo piatto");
A2=punto;
r2=semiretta(A2, punto);
ColoreRiempimento(0,0,255);
angretto=angolo(r2,90,antiorario);
scrivi("angolo retto");
A3=punto;
r3=semiretta(A3, punto);
ColoreRiempimento(255,255,0);
angacuto=angolo(r3,30,antiorario);
scrivi("angolo acuto");
A4=punto;
r4=semiretta(A4, punto);
ColoreRiempimento(0,255,0);
angottuso=angolo(r4,120,antiorario);
scrivi("angolo ottuso");
```

Esercizio 8

Rappresenta con un programma Matcos due angoli consecutivi e due adiacenti.

■ Teorema 3

Dati due angoli denominati:

- 1) α di vertice A, lati l_1 , l_2 ed ampiezza m;
- 2) β di vertice B, lati s_1 , s_2 ed ampiezza n;

esiste un angolo, diciamo γ , con vertice in A(o B), lati l_1 (o l_2) e s_1 (o s_2) ed ampiezza $n+m$.

■ Dimostrazione

Teorica

α : angolo di vertice A, lati l_1 (primo) e l_2 (secondo) ed ampiezza m; dato

β : angolo di vertice B, lati s_1 (primo) e s_2 (secondo), ampiezza n;
dato

δ : angolo di lato l_2 , ampiezza n, antiorario; assioma 7

s_3 : semiretta secondo lato di δ ; Regola 15

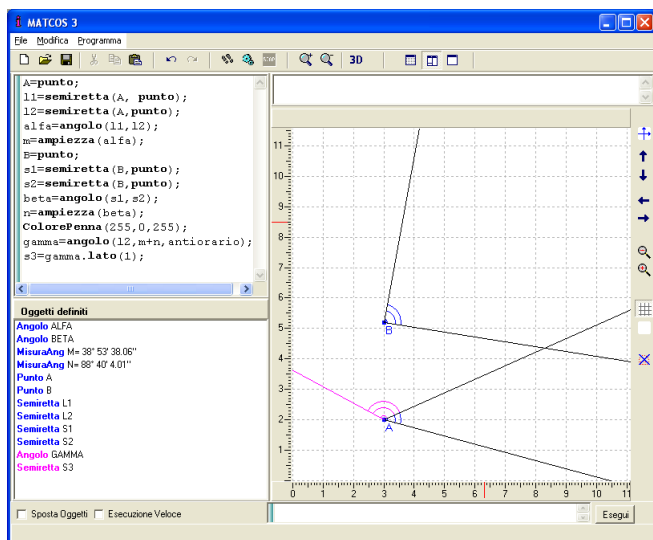
γ : angolo di vertice A, lati l_2 ed s_3 , ampiezza $m+n$; Definizione 3.

Computazionale

```

A=punto;
l1=semiretta(A, punto);
l2=semiretta(A,punto);
alfa=angolo(l1,l2);
m=ampiezza(alfa);
B=punto;
s1=semiretta(B,punto);
s2=semiretta(B,punto);
beta=angolo(s1,s2);
n=ampiezza(beta);
ColorePenna(255,0,255);
gamma=angolo(l2,m+n,antiorario);
s3=gamma.lato(1);

```



■ Regola di linguaggio 21

L'angolo gamma di ampiezza $m+n$ di cui nel Teorema 3 si chiama angolo somma di α e β e si scrive:

$$\boxed{\alpha + \beta = \gamma}$$

Esercizio 9

Rappresenta con un programma Matcos due angoli consecutivi tali che l'angolo somma misuri 90° . Tali angoli si chiamano **complementari**.

Esercizio 10

Rappresenta con un programma Matcos due angoli adiacenti, quanto misura l'angolo somma? Tali angoli si chiamano **supplementari**.

■ Regola di linguaggio 22

Dato un angolo di vertice A, e lati la semiretta (A,B) e la semiretta (A,C); siano P e Q due punti delle semirette opposte rispettivamente alla semiretta (A,B) e alla semiretta (A,C); l'angolo definito dai punti A, P e Q cioè l'angolo (P,A,Q) si chiama opposto al vertice all'angolo dato.

Esempio 17

Rappresentare due angoli opposti al vertice.

Soluzione

A=**punto**;

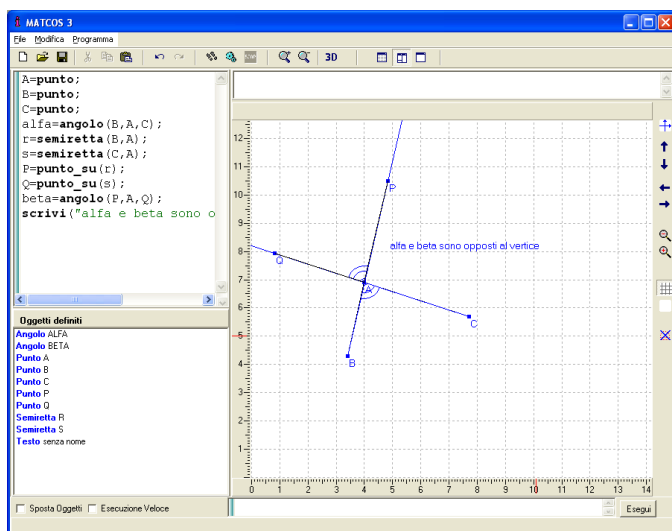
B=**punto**;

C=**punto**;

```

alfa=angolo(B,A,C);
r=semiretta(B,A);
s=semiretta(C,A);
P=punto_su(r);
Q=punto_su(s);
beta=angolo(P,A,Q);
scrivi("alfa e beta sono opposti al vertice");

```



Esercizio 11

Rappresentare due angoli opposti al vertice e calcolarne l'ampiezza; cosa si può congetturare ?

Soluzione

Aggiungere al programma dell'esempio precedente:

```

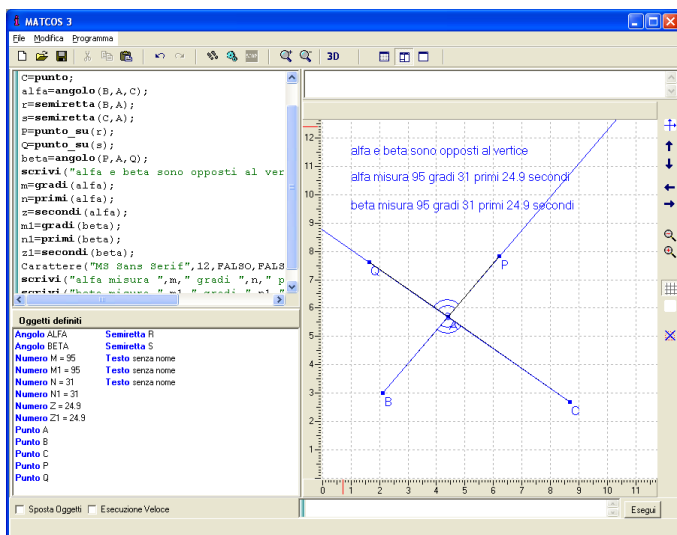
m=gradi(alfa);
n=primi(alfa);

```

```

z=secondi(alfa);
m1=gradi(beta);
n1=primi(beta);
z1=secondi(beta);
scrivi("alfa misura ",m," gradi ",n," primi ",z," secondi");
scrivi("beta misura ",m1," gradi ",n1," primi ",z1," secondi");

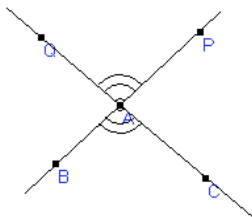
```



Si può congetturare che angoli opposti al vertice hanno la stessa ampiezza.

■ Teorema 4

Angoli opposti al vertice hanno la stessa ampiezza.



■ Dimostrazione

A=punto
B=punto
C=punto
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{dati} \end{array} \right.$
alfa=angolo(B,A,C),
r=semiretta(B,A),
s=semiretta(C,A),
P=punto su r seguente A,
Q=punto su s seguente A,
beta=angolo(P,A,Q),
alfa+ angolo(P,A,C)=angolo piatto,
beta+angolo(P,A,C)=angolo piatto,
alfa=beta per la proprietà dell'addizione.

Esercizio 12

Dare la dimostrazione computazionale del Teorema 4 e la rappresentazione nel modello.

■ Definizione 5 (Circonferenza)

Dato un punto O ed un numero positivo r, si chiama circonferenza di centro O e raggio r l'insieme dei punti che hanno distanza dal punto O uguale ad r; cioè se P è un punto della circonferenza si ha:

$$\text{distanza}(O,P)=r \quad .$$

Esercizio 13

Rappresentare una circonferenza di centro O e raggio r.

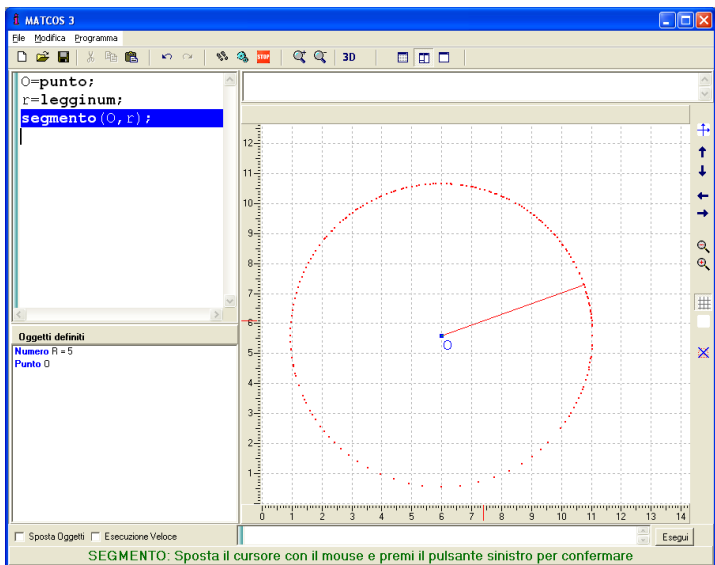
Soluzione

Considerando il comando

Segmento(<punto>, <numero>);

e muovendo il mouse in modo da fare un giro completo sul video, il secondo estremo del segmento di cui sopra descrive una linea chiusa che ha la proprietà della circonferenza. Pertanto il seguente segmento di programma raggiunge lo scopo

```
O=punto;  
r=legginum;  
segmento(O,r);
```



■ Regola di comando 23

Per ottenere una circonferenza di assegnato centro e raggio esiste il comando relativo alla Definizione 5:

Circ(<punto>,<numero>);

■ Regola di linguaggio e comando 24

Se C è una circonferenza per indicare un punto P su di essa, scriveremo $P \in C$ e in termini di comando

$$P = \text{punto_su}(C);$$

■ Definizione 6

Siano P e Q due punti di una circonferenza C , il segmento di estremi P e Q si chiama **corda** di C ; se inoltre il segmento PQ passa per il centro della circonferenza la corda si chiama, più propriamente, **diametro**.

■ Teorema 5

La misura del diametro di una circonferenza è pari al doppio del raggio.

■ Dimostrazione

C : circonferenza di centro O e raggio r ; ipotesi
 PQ : segmento(P, Q) diametro di C ,
 P, Q punti su C ,
 O punto di PQ (Def. 6),
 $\text{distanza}(O, P) = \text{distanza}(O, Q) = r$, (Def. 5)
 $\text{distanza}(P, Q) = \text{distanza}(O, P) + \text{distanza}(O, Q) = r + r = 2r$ per
assioma 3; misura del segmento(P, Q), diametro di
 C , è $2r$, tesi.

Esercizio 14

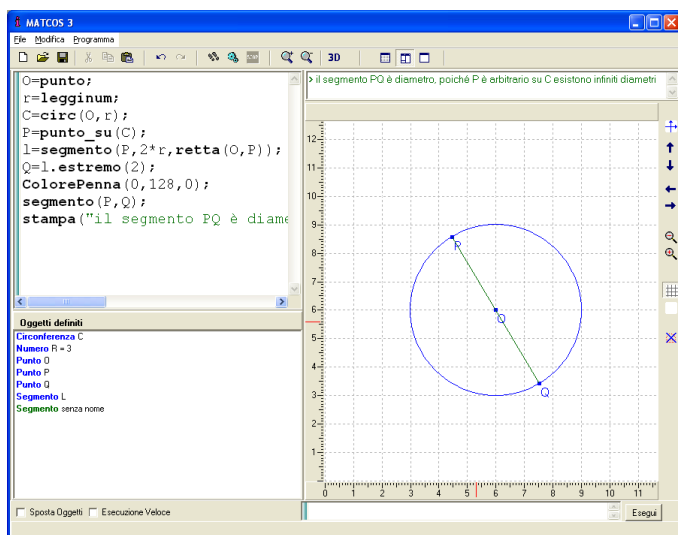
Verifica nel modello il Teorema 5.

■ Teorema 6

In una circonferenza esistono infiniti diametri.

■ Dimostrazione – (Computazionale)

```
O=punto;  
r=legginum;  
C=circ(O,r);  
P=punto_su(C);  
l=segmento(P,2*r,retta(O,P));  
Q=l.estremo(2);  
ColorePenna(0,128,0);  
segmento(P,Q);  
stampa("il segmento PQ è diametro, poiché P è arbitrario  
su C esistono infiniti diametri");
```



■ Teorema 7

In una circonferenza la misura di ogni diametro è maggiore di quella di qualsiasi corda.

■ Dimostrazione – (Teorica)

- 1) $\underline{C}$: circonferenza di centro O e raggio r ; ipotesi
- 2) $\underline{PQ}$: diametro di C , (def. 6)
- 3) $\underline{ED}$: corda generica, (def. 6)
- 4) $d(O, E) = d(O, D) = r$, (def. 5)
- 5) O non appartiene alla retta (E, D) , per (3) e (def. 6)
- 6) $d(E, D) < d(E, O) + d(O, D)$, (assioma 3)
- 7) $d(E, D) < r + r = 2r$. tesi

■ Regola di linguaggio 25

Ogni retta determina due **semipiani**, ovvero due insiemi di punti disgiunti, escludendo i punti della retta; l'unione dei due semipiani, e dei punti della retta, è il piano.

■ Assioma 8 (Posizione reciproca di due circonferenze e di una circonferenza e una retta)

Siano C e C_1 due circonferenze di centri rispettivi O e O_1 e di raggi r e r_1 esse hanno:

- 1) due punti comuni se e solo se:

$$r_1 - r < d(O, O_1) < r + r_1 \quad \text{se } r_1 > r$$

$$r_1 - r < d(O, O_1) < r + r_1 \quad \text{se } r_1 > r ;$$

o

$$r - r_1 < d(O, O_1) < r + r_1 \quad \text{se } r > r_1$$

$$r - r_1 < d(O, O_1) < r + r_1 \quad \text{se } r > r_1 ;$$

ciascuno di questi punti è unico nel semipiano determinato dalla retta OO_1 ;

2) un sol punto in comune se e solo se:

$$d(O, O_1) = r + r_1;$$

3) nessun punto in comune negli altri casi.

Una retta ed una circonferenza possono avere un sol punto in comune, nessun punto in comune, due punti in comune, ciascuna delle precedenti condizioni esclude ogni altra.

■ Regola di linguaggio e di comando 26

Due circonferenze che hanno due punti in comune si diranno **incidenti** o **intersecanti** e i punti comuni punti di **incidenza** o di **intersezione**; se hanno un sol punto in comune si diranno **tangenti** e il punto comune punto di **tangenza**; se non hanno punti in comune si diranno

esterne se $d(O, O_1) > r + r_1$

interne se $d(O, O_1) < r + r_1$.

Analogamente se una retta ha un sol punto in comune con la circonferenza si dirà **tangente** ed il punto si dirà di **tangenza**; se non hanno punti in comune si dirà esterna ed infine se hanno due punti in comune si diranno **incidenti** ed i punti in comune si diranno di **incidenza** o di **intersezione**.

Per ottenere i punti di incidenza di due circonferenze o di una retta e di una circonferenza il comando è:

<identificatore>=**intersezione**(<circonf.1>,<circonf.2>);

<identificatore>=**intersezione**(<circonf>,<retta>);

Per un punto esterno alla circonferenza passano due rette tangenti alla circonferenza, il relativo comando è:

<identificatore>=**tangente**(<circonf>,<punto>);

Esercizio 15

Rappresenta nel modello due circonferenze incidenti, due circonferenze interne e verifica la condizione dell'assioma 8.

Esercizio 16

Rappresenta nel modello una circonferenza ed una retta:

- a) esterna;
- b) incidente.

Esercizio 17

Rappresenta nel modello le tangenti da un punto esterno ad una circonferenza.

■ Definizione 7 (Triangoli)

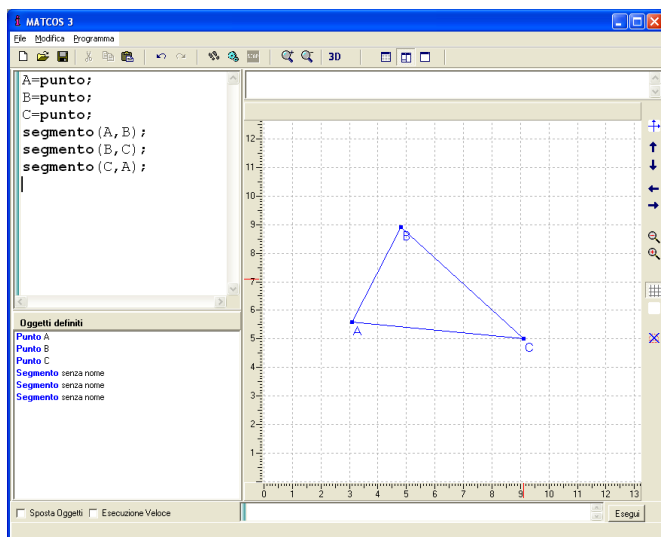
Dati tre punti distinti e non appartenenti alla stessa retta, la figura formata dai tre segmenti da essi determinati, si chiama **triangolo**; i punti si chiamano anche **vertici** e i segmenti **lati**.

Esempio 18

Rappresentare un triangolo.

Soluzione

A=**punto**;
B=**punto**;
C=**punto**;
segmento(A,B);
segmento(B,C);
segmento(C,A);



■ Regola di linguaggio 27

In un triangolo gli angoli convessi formati dalle semirette su cui giacciono i lati si chiamano angoli **interni**, di contro gli angoli adiacenti a ciascuno di essi si chiamano angoli **esterni**. Ogni lato si può chiamare anche base, e si dice opposto all'angolo il cui vertice non appartiene al lato ed adiacente agli altri due.

Esercizio 18

Verifica nel modello la somma delle misure degli angoli interni di un triangolo e formula una congettura.

Esercizio 19

Verifica nel modello che in un triangolo un angolo esterno è pari alla somma degli angoli interni non adiacenti.

Esercizio 20

Data una circonferenza di centro O , siano A, B, C tre punti su di essa, l'angolo ABC dicesi angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AC , e l'angolo AOC dicesi angolo al centro che insiste sullo stesso arco. Verificare nel modello che l'angolo alla circonferenza misura la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.

Esercizio 21

Dimostrare la proposizione enunciata nell'esercizio precedente.

■ Regola di notazione 28

Spesso un triangolo si indica denominando i suoi vertici, ad esempio triangolo ABC .

■ Teorema 8

In un triangolo la misura di un lato è minore della somma delle misure degli altri due.

■ Dimostrazione (Teorica)

ABC triangolo ipotesi
 A, B, C punti non appartenenti alla stessa retta (def 7)
distanza(A, B) misura del lato AB (Regola 6)
distanza(B, C) misura del lato BC "
distanza(A, C) misura del lato AC "
distanza(A, B) < distanza(B, C) + distanza(A, C) (assioma 3 pr.IV)
distanza(A, C) < distanza(A, B) + distanza(B, C) (assioma 3 pr.IV)
distanza(B, C) < distanza(B, A) + distanza(A, C) (assioma 3 pr.IV)

Esercizio 22

Verifica nel modello il teorema 8.

■ Regola di linguaggio 29

Un triangolo con due lati di uguale misura si chiama **isoscele**, l'altro lato (diseguale) si dice più propriamente **base** ed il vertice opposto vertice del triangolo.

Analogamente un triangolo con tutti e tre i lati uguali si chiama **equilatero**. Un triangolo che non sia né isoscele, né equilatero si chiama **scaleno**.

■ Teorema 9 (Esistenza del triangolo isoscele)

Assegnato un numero $m > 0$ esiste un triangolo isoscele con i lati uguali di misura m ; esso è unico nel semipiano determinato dalla base.

■ Dimostrazione

Teorica

$m > 0$ numero positivo	ipotesi
$A = \text{punto}$	(notazione 1)
$n = \text{numero positivo arbitrario}$	(purché minore di $2m$)
$l: \text{segmento}(A, n)$	(assioma 4)
$B: \text{secondo estremo di } l$	(regola di linguaggio 4)
$C: \text{circonferenza di centro } A \text{ e raggio } n$	(Def.5)
$C1: \text{circonferenza di centro } A \text{ e raggio } n$	(Def.5)
$H: \text{intersezione}(C, C1)$	(assioma 8)
triangolo ABH.	

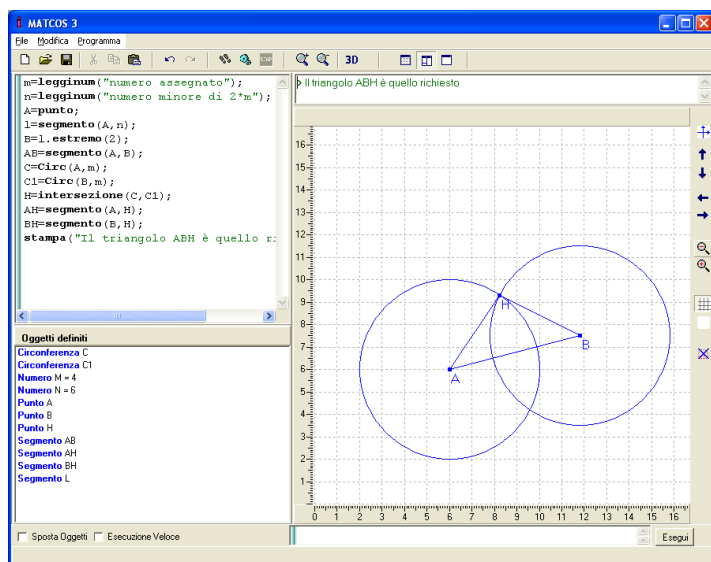
Computazionale

```
m=legginum("numero assegnato ");
n=legginum("numero minore di 2*m ");
```

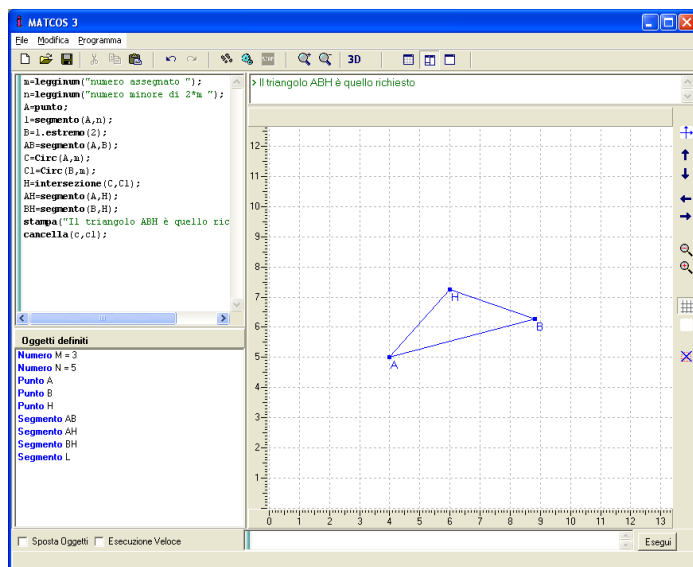
```

A=punto;
l=segmento(A,n);
B=l.estremo(2);
AB=segmento(A,B);
C=Circ(A,m);
C1=Circ(B,m);
H=intersezione(C,C1);
AH=segmento(A,H);
BH=segmento(B,H);
stampa("Il triangolo ABH è quello richiesto ");

```



Aggiungendo al programma precedente l'istruzione
Cancella(C,C1);
 si ottiene:



■ Teorema 10 (Esistenza del triangolo equilatero)

Assegnato un numero positivo m esiste un triangolo equilatero con il lato di misura m ; esso è unico nel semipiano determinato dalla retta su cui giace uno dei lati.

■ Dimostrazione

Teorica

m numero positivo

ipotesi

A =punto

(notazione 1)

l : segmento(A, m)

(assioma 4)

B : l .estremo(2)

(regola di linguaggio 4)

C : Circonferenza di centro A e raggio m (def. 5)

$C1$: Circonferenza di centro B e raggio m (def. 5)

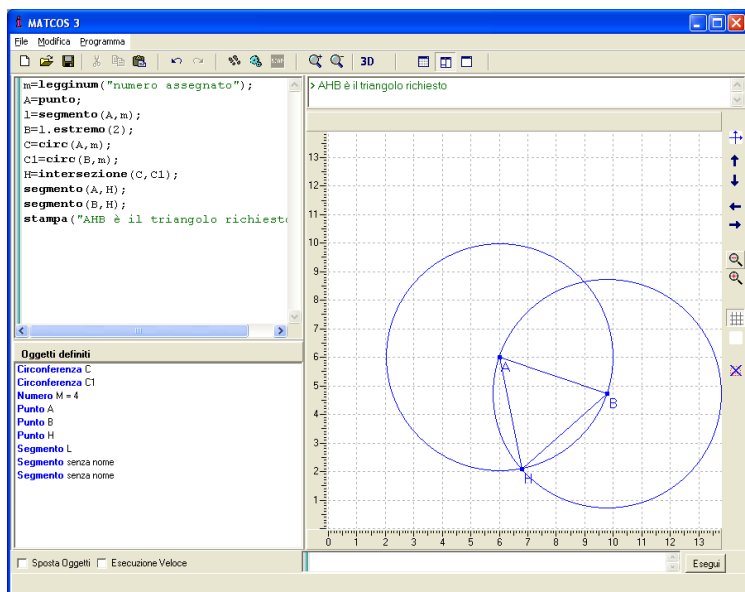
H : intersezione($C, C1$)

(assioma 8)

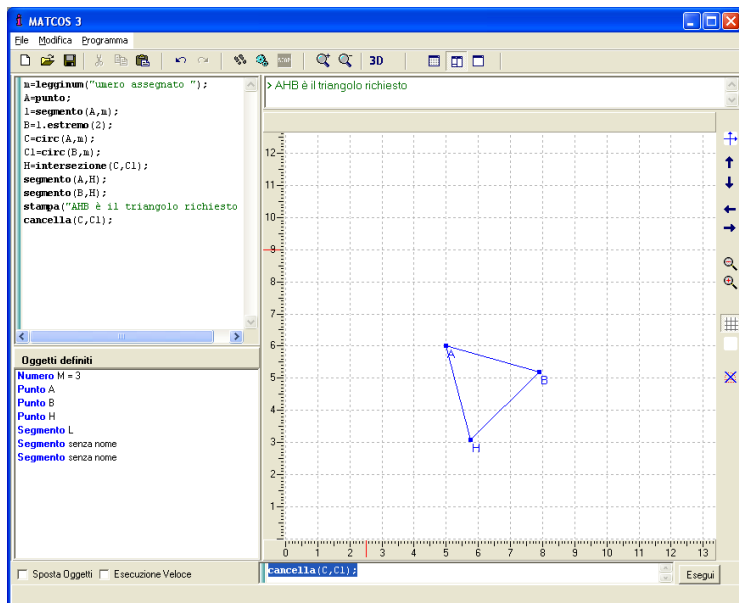
triangolo AHB

Computazionale

```
m=legginum("numero assegnato");  
A=punto;  
l=segmento(A,m);  
B=l.estremo(2);  
C=circ(A,m);  
C1=circ(B,m);  
H=intersezione(C,C1);  
segmento(A,H);  
segmento(B,H);  
stampa("AHB è il triangolo richiesto");
```



Aggiungendo al programma precedente l'istruzione
Cancella(C,C1);
si ottiene:



L'unicità nel semipiano determinato dalla retta su cui giace uno dei lati è data dall'assioma 8.

■ Regola di linguaggio 30

L'angolo interno di un triangolo determinato dalle semirette su cui giacciono i due lati con il vertice comune, si dice compreso tra i due lati.

■ Teorema 11

Assegnati la misura di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, il triangolo è unico, nel semipiano determinato dalla retta su cui giace uno dei lati.

■ Dimostrazione

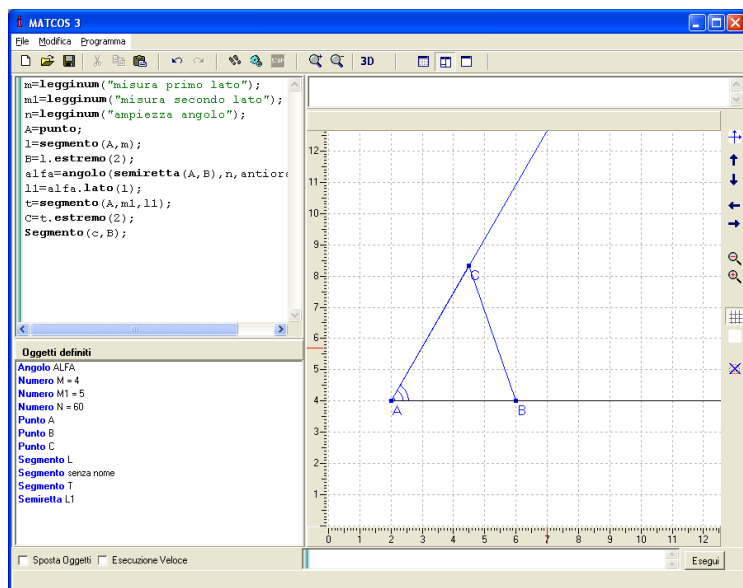
Teorica

m	numero positivo,	misura del 1° lato	ipotesi
m ₁	numero positivo,	misura del 2° lato	ipotesi
n	numero positivo,	ampiezza angolo compreso	ipotesi
A=punto,		notazione *	
l=segmento(A,m),		regola.....	
B=secondo estremo di l,		regola.....	
alfa: angolo(semiretta(A,B), n, antiorario),		assioma.....	
s1: secondo lato di alfa,		regola.....	
c: segmento(A, m1, s1),		assioma.....	
triangolo ABC.			

Computazionale

```
m=legginum("misura primo lato");
m1=legginum("misura secondo lato");
n=legginum("ampiezza angolo");
A=punto;
l=segmento(A,m);
B=l.estremo(2);
alfa=angolo(semiretta(A,B),n,antiorario);
l1=alfa.lato(1);
t=segmento(A,m1,l1);
C=t.estremo(2);
segmento(C,B);
```

* Da ora in poi il lettore attento completi con il numero corrispondente alla dicitura.



■ Assioma 9

Siano A e B due punti distinti, s e t due semirette aventi origine in A e B. Sia α l'angolo convesso determinato dalla semiretta (A,B) e dalla semiretta s

$$\alpha = \text{angolo}(\text{semiretta}(A,B), s)$$

β l'angolo convesso determinato dalla semiretta (B,A) e t

$$\beta = \text{angolo}(\text{semiretta}(B,A), t)$$

Se la somma delle ampiezze di α e β denotata con $\alpha + \beta$ è:

- minore di 180° allora le semirette s e t si incontrano in un punto C, appartenente al semipiano determinato dalla retta (A,B), cui appartengono gli angoli α e β ;
- uguale a 180° allora le semirette non hanno punti comuni;
- maggiore di 180° allora si incontrano le semirette opposte di s e t, nel semipiano opposto a quello contenente gli angoli α e β .

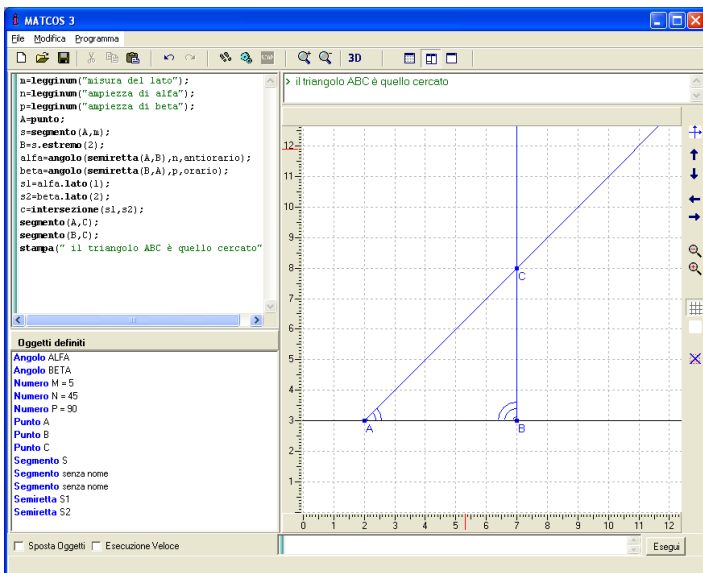
■ Teorema 12

Siano α e β due angoli assegnati mediante la loro misura, denotata con n e b , m un numero positivo assegnato. Esiste un solo triangolo avente un lato di misura m e come angoli adiacenti α e β , tale triangolo è unico nel semipiano determinato dalla retta su cui giace il lato di misura m .

■ Dimostrazione

Computazionale

```
m=legginum("misura del lato");
n=legginum("ampiezza di alfa");
p=legginum("ampiezza di beta");
A=punto;
s=segmento(A,m);
B=s.estremo(2);
alfa=angolo(semiretta(A,B),n,antiorario);
beta=angolo(semiretta(B,A),p,orario);
s1=alfa.lato(1);
s2=beta.lato(2);
c=intersezione(s1,s2);
segmento(A,C);
segmento(B,C);
stampa(" il triangolo ABC è quello cercato");
```



■ Teorema 13

Assegnati tre numeri reali positivi m, n, p tali che ciascuno di essi è minore della somma degli altri due, esiste un triangolo avente i lati di misura rispettiva m, n, p ; tale triangolo è unico nel semipiano determinato dalla retta su cui giace uno dei lati.

■ Dimostrazione

Computazionale

```

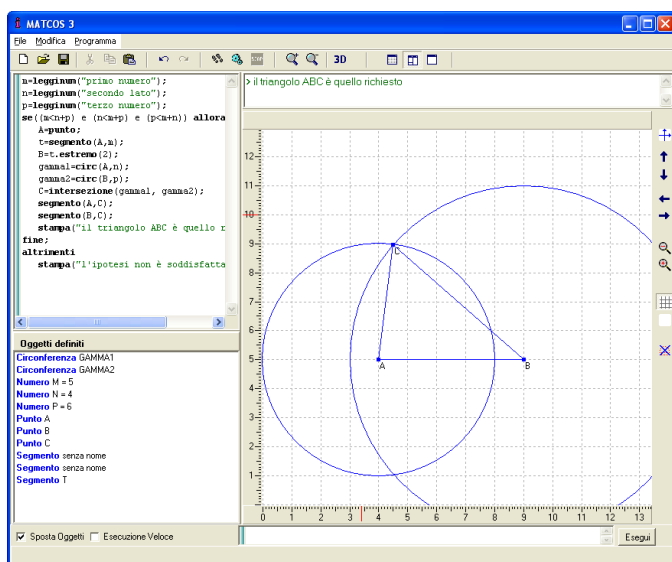
m=legginum("primo numero");
n=legginum("secondo numero");
p=legginum("terzo numero");
se((m<n+p) E (n<m+p) E (p<m+n)) allora esegui;
  A=punto;
  t=segmento(A,m);
  B=t.estremo(2);

```

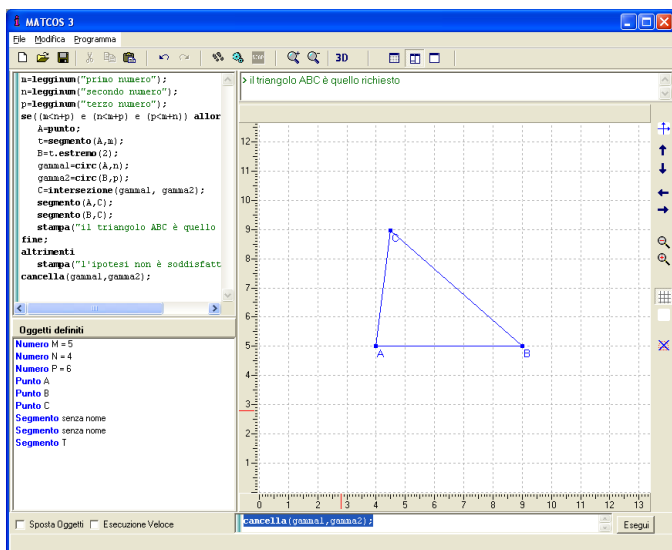
```

gamma1=circ(A,n);
gamma2=circ(B,p);
C=intersezione(gamma1, gamma2);
segmento(A,C);
segmento(B,C);
stampa("il triangolo ABC è quello richiesto");
fine;
altrimenti
stampa("l'ipotesi non è soddisfatta");

```



Aggiungendo il comando
cancella(gamma1,gamma2);
si ottiene:



■ Definizione 8

Due triangoli si dicono **uguali(congruenti)** se e solo se hanno rispettivamente uguali le misure dei lati e le ampiezze degli angoli interni; quindi l'uguaglianza di due triangoli implica l'uguaglianza dei sei elementi (lati e angoli).

■ Teorema 14

Due triangoli sono uguali se è vera una delle seguenti affermazioni, note come criteri di uguaglianza:

- hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso(tre elementi)
- hanno ordinatamente uguali due angoli interni ed il lato compreso(tre elementi)
- hanno ordinatamente uguali tutti e tre i lati(tre elementi)

■ Dimostrazione

Conseguenza logica della Def. 7 e dei teoremi 10,11,12.

■ Definizione 9

In un triangolo il segmento che unisce un vertice con il punto medio del lato opposto si chiama **mediana**.

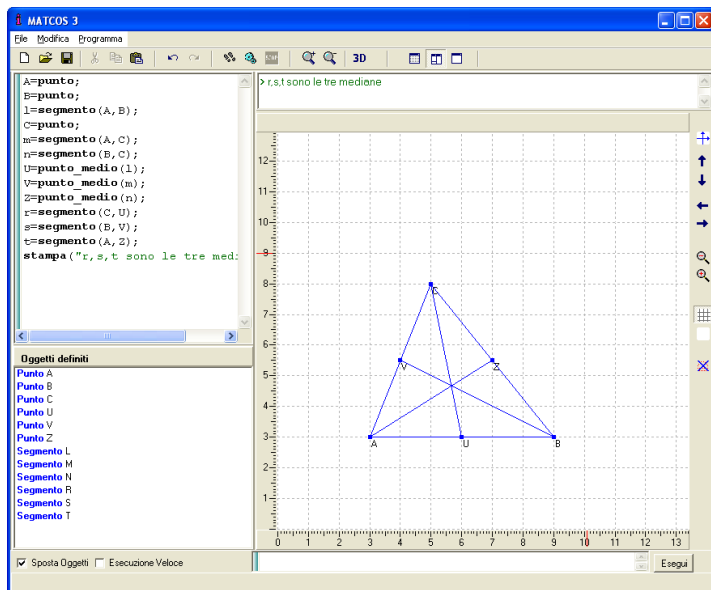
Esempio 19

Rappresentare le tre mediane di un triangolo.

Soluzione

Computazionale

```
A=punto;  
B=punto;  
l=segmento(A,B);  
C=punto;  
m=segmento(A,C);  
n=segmento(B,C);  
U=punto_medio(l);  
V=punto_medio(m);  
Z=punto_medio(n);  
r=segmento(C,U);  
s=segmento(B,V);  
t=segmento(A,Z);  
stampa("r,s,t sono le tre mediane");
```



■ Teorema 15

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

■ Dimostrazione

Teorica

ABC triangolo isoscele sulla base AB, ipotesi

α e β siano gli angoli alla base,

t sia la bisettrice dell'angolo al vertice C,

H punto intersezione di t con retta (A,B),

CAH e CBH sono congruenti, per teorema 11 e ipotesi

α e β sono congruenti. tesi

■ Teorema 16

In un triangolo equilatero tutti gli angoli sono congruenti.

■ Dimostrazione

Conseguenza del teorema 14.

■ Definizione 10

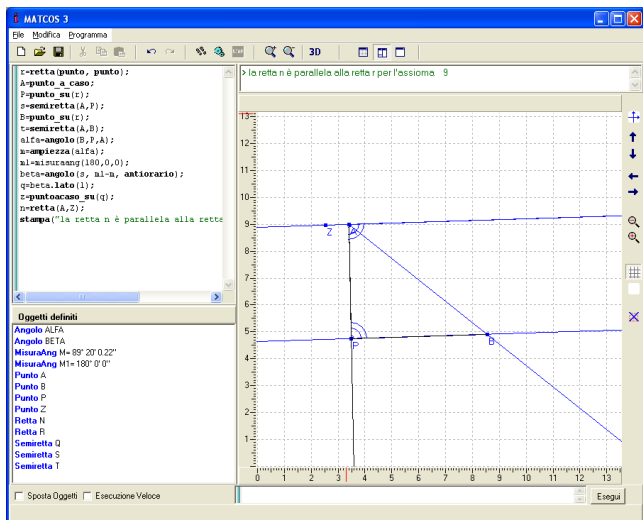
Due rette distinte che non hanno punti in comune si chiamano **parallele**.

■ Teorema 17

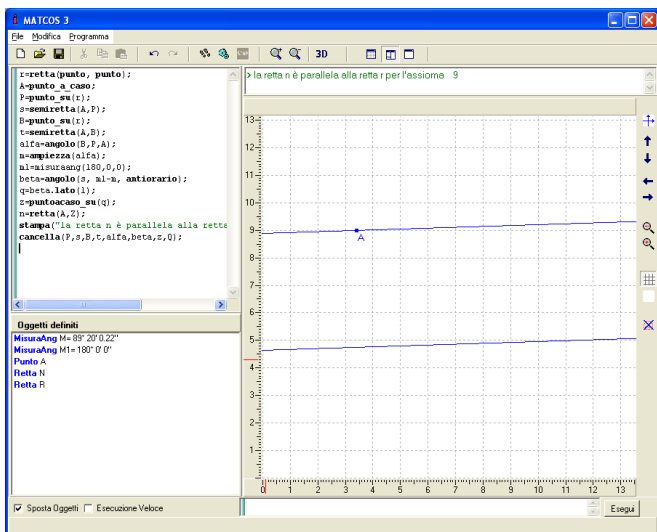
Data una retta ed un punto non appartenente ad essa, esiste una ed una sola retta passante per quel punto e parallela alla retta data.

■ Dimostrazione

```
r=retta(punto, punto);           /*ipotesi */
A=punto_a_caso;                  /*ipotesi */
P=punto_su(r);
s=semiretta(A,P);
B=punto_su(r);
t=semiretta(A,B);
alfa=angolo(B,P,A);
m=ampiezza(alfa);
m1=misuraang(180,0,0);
beta=angolo(s, m1-m, antiorario);
q=beta.lato(1);
z=puntoacaso_su(q);
n=retta(A,Z);
stampa("la retta n è parallela alla retta r per l'assioma 9");
```



Aggiungendo il comando
cancella(P,s,B,t,alfa,beta,z,Q);
 si ottiene:



■ Regola di comando 31

La retta per un punto parallela ad una retta data non contenente il punto, di cui al Teorema 16, si ottiene con il comando:

parallela(<retta>,<punto>);

Esempio 20

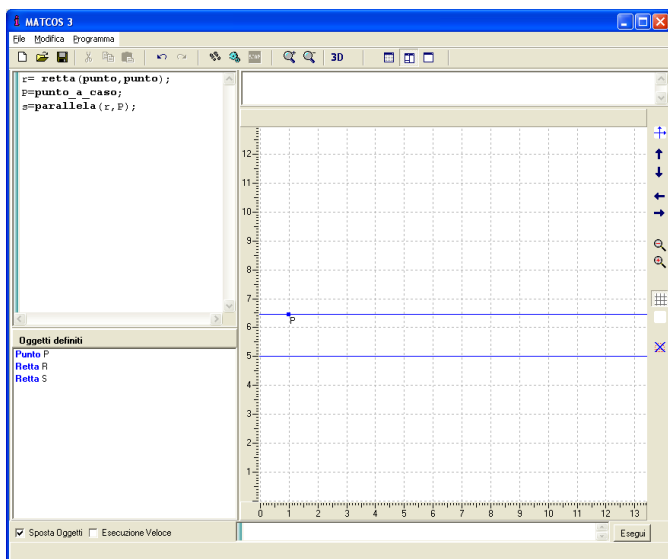
Data una retta ed un punto non appartenente ad essa rappresentare la retta parallela per il punto alla retta data.

Soluzione

r= retta(punto,punto);

P=punto_a_caso;

s=parallela(r,P);



■ Regola di linguaggio 32

Due semirette, due segmenti o una semiretta e un segmento che giacciono su rette parallele sono chiamate anche parallele.

■ Definizione 11

Una retta che ha in comune con due altre rette esattamente due punti, uno su ciascuna delle due rette, si chiama trasversale delle due rette.

■ Definizione 12

Supponiamo che m ed n siano due rette per le quali la retta k è una trasversale che incontra m ed n rispettivamente nei punti A e B . Ciascuno dei due angoli che ha A per vertice, una semiretta di m come lato 1 e come lato 2 la semiretta di k contenente il segmento (A,B) è chiamato angolo interno. Similmente ci sono due angoli interni aventi B come vertice (vedi Fig. 1).

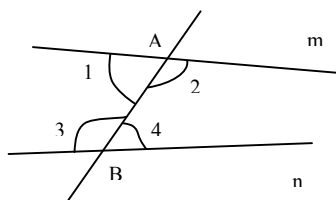


Fig. 1

Due angoli interni, uno avente vertice A e l'altro avente vertice B , che giacciono su semipiani opposti rispetto a k , sono chiamati angoli alterni interni.

Ciascuno dei due angoli che ha A come vertice, una semiretta di m come lato 1 e per lato 2 la semiretta di k che non contiene il segmento (A,B) è chiamato un angolo esterno. Similmente ci sono due angoli esterni aventi B come vertice (fig. 2).

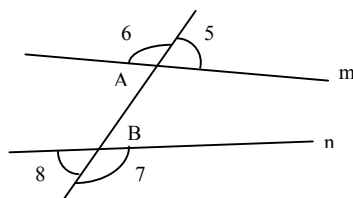


Fig. 2

Due angoli tali che uno ha vertice A e l'altro vertice B, uno è angolo interno e l'altro è un angolo esterno e i loro interni sono nello stesso semipiano determinato dalla trasversale, sono chiamati angoli corrispondenti. In riferimento alle figg. 1 e 2 e alla numerazione riportata abbiamo:

$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ e } 4 \\ 2 \text{ e } 3 \end{array} \right\}$ Alterni interni

$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ e } 8 \\ 6 \text{ e } 7 \end{array} \right\}$ Alterni esterni

$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ e } 3 \\ 2 \text{ e } 4 \end{array} \right\}$ Coniugati interni

$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ e } 7 \\ 6 \text{ e } 8 \end{array} \right\}$ Coniugati esterni

$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ e } 7, 1 \text{ e } 8 \\ 5 \text{ e } 4, 6 \text{ e } 3 \end{array} \right\}$ Corrispondenti

Esercizio 23

Rappresenta in ambiente virtuale le fig. 1 e 2 di cui sopra.

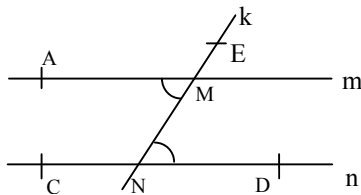
■ Teorema 18

Due rette tagliate da una trasversale sono parallele se e solo se hanno angoli alterni interni (esterni) uguali (congruenti).

■ Dimostrazione

1° parte

Siano m ed n parallele e k la trasversale, ipotesi (Fig.3)



$m = \text{retta}(A, M);$
 $n = \text{retta}(C, N);$
 $\alpha = \text{angolo}(A, M, N);$
 $\beta = \text{angolo}(C, N, M);$
 $\text{ampiezza}(\alpha) + \text{ampiezza}(\beta) = 180; \quad \text{assioma 9}$
 $\gamma = \text{angolo}(M, N, D);$
 $\text{ampiezza}(\gamma) + \text{ampiezza}(\beta) = 180; \quad \text{adiacenti}$
 $\gamma = \alpha; \quad \text{proprietà dell'addizione}$

2° parte

$\alpha = \text{angolo}(A, M, N);$ $\beta = \text{angolo}(M, N, D);$ $\text{ampiezza}(\alpha) = \text{ampiezza}(\beta);$ $m = \text{retta}(A, M);$ $n = \text{retta}(C, N);$ $k = \text{retta}(M, N);$ $\gamma = \text{angolo}(C, N, M);$ $\text{ampiezza}(\gamma) + \text{ampiezza}(\beta) = 180^\circ;$ $\text{ampiezza}(\gamma) + \text{ampiezza}(\alpha) = 180^\circ;$ $m \text{ parallela ad } n, \text{ per assioma 9.}$	{	ipotesi
---	---	---------

Esercizio 24

Verifica in ambiente virtuale il teorema 17.

■ Teorema 19

Due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti congruenti e viceversa.

■ Soluzione

1° parte

```
A=punto;  
M=punto;  
m=retta(A,M);  
C=punto;  
N=punto;  
n=retta(C,N);  
k=retta(M,N);  
// m ed n parallele, k trasversale //          ipotesi  
T=punto_su(k);  
alfa=angolo(semiretta(A,M), semiretta(M,T));  
m1=ampiezza(alfa);  
beta=angolo(semiretta(C,N), semiretta(N,M));  
n1=ampiezza(beta);  
gamma=angolo(semiretta(N,M), semiretta(M,A));  
z=ampiezza(gamma);  
z+m1=180° //perché adiacenti//  
z+n1=180° //per assioma 9//  
m1=n1      //proprietà dell'uguaglianza//  
alfa=beta.  // tesi//
```

2° parte

```
A=punto;  
M=punto;  
m=retta(A,M);  
C=punto;  
N=punto;  
n=retta(C,N);  
k=retta(M,N);
```

```

// rette m,n e k trasversale /
T=punto_su(k);
alfa=angolo(semiretta(A,M), semiretta(M,T));
m1=ampiezza(alfa);
beta=angolo(semiretta(C,N), semiretta(N,M));
n1=ampiezza(beta);
m1=n1; // ipotesi //
gamma=angolo(semiretta(M,N), semiretta(M,A));
z=ampiezza(gamma);
z+m1=180;
z+n1=180 //proprietà dell'uguaglianza //
// m e n sono parallele // assioma 9

```

Esercizio 25

Verifica in ambiente virtuale il teorema 18.

■ Teorema 20

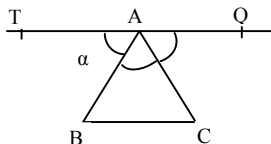
La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180° .

■ Dimostrazione

```

A=punto;
B=punto;
C=punto;
p=poligono(A,B,C);
r=retta(B,C); // ipotesi triangolo BAC //

```



// A non appartiene ad r //

q=parallela(r,A);

Teorema 16

T=punto_su(q);

alfa=angolo(semiretta(T,A), semiretta(A,B));

beta=angolo(B,A,C);

Q=punto_su(q);

gamma=angolo(C,A,Q);

alfa+beta+gamma= angolo piatto;

alfa1=angolo(C,B,A);

beta1=angolo(A,C,B);

alfa=alfa1

beta=beta1

{ Teorema 18

gamma+alfa1+beta1=angolo piatto. *proprietà uguaglianza*

Esercizio 26

Verifica in ambiente virtuale il teorema 19.

■ Definizione 13

Due semirette con l'origine comune sono dette perpendicolari se e solo se l'angolo convesso da esse formato è retto.

■ Regola di linguaggio 33

L'origine di due semirette perpendicolari è chiamato punto di perpendicolarità e le due semirette sono dette essere perpendicolari l'una a ciascun altra.

■ Definizione 14

Due rette che contengano due semirette, ciascuna per una retta, perpendicolari sono dette perpendicolari.

■ Regola di linguaggio 34

Due segmenti che giacciono su rette perpendicolari ed hanno un estremo in comune sono chiamati segmenti perpendicolari. Una retta e un segmento si dicono perpendicolari se il segmento ha un estremo sulla retta e giace su un'altra retta ad essa perpendicolare (Fig. 3).

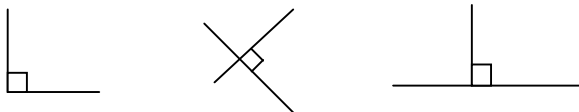


Fig. 3

Esercizio 27

Rappresenta in ambiente virtuale due semirette, rette e segmenti perpendicolari.

■ Regola di notazione 35

La perpendicolarità sarà indicata nelle figure con un piccolo quadrato (Fig. 3).

■ Regola di linguaggio 36

Due rette perpendicolari, due segmenti perpendicolari, una retta ed un segmento perpendicolare, sono detti essere perpendicolari uno a ciascun altro.

■ Teorema 21

Se m è una retta ed A un punto esiste una ed una sola retta passante per A e perpendicolare ad m .

■ Dimostrazione

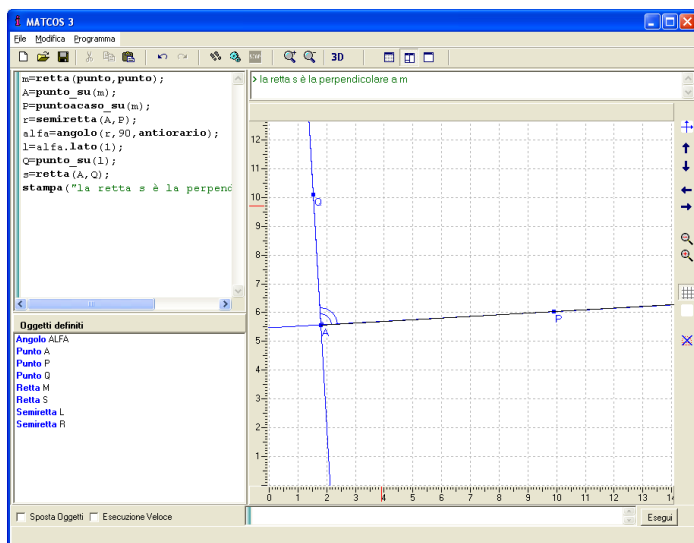
1° parte

*/*Sia A un punto di m */*

```

m=retta(punto,punto);
A=punto_su(m);
P=puntoacaso_su(m);
r=semiretta(A,P);
alfa=angolo(r,90,antiorario); /*assioma 7*/
l=alfa.lato(1);
Q=punto_su(l);
s=retta(A,Q);
stampa("la retta s è la perpendicolare a m");

```



2° parte

```

/*A non giace su m */
m=retta(punto, punto);
A=punto_a_caso;
P=punto_su(m);
r=retta(A,P);
B=punto_su(m);
alfa=angolo(semiretta(P,A), semiretta(P,B));

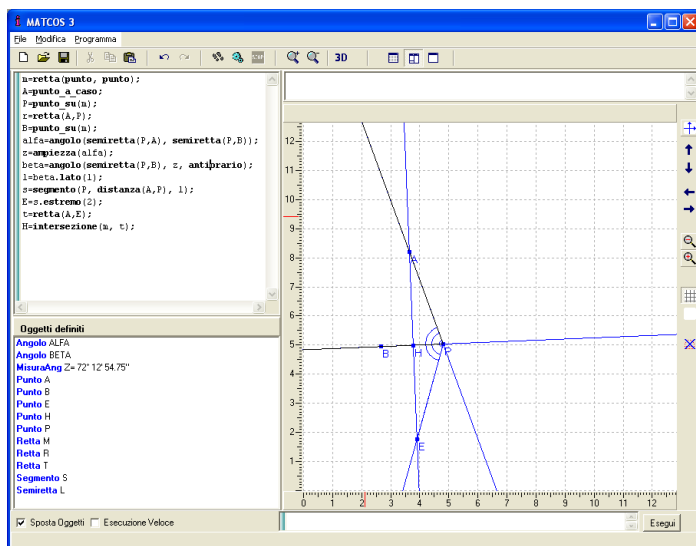
```

```

z=ampiezza(alfa);
beta=angolo(semiretta(P,B), z, antiorario);
l=beta.lato(1);
s=segmento(P, distanza(A,P), l);
E=s.estremo(2);
t=retta(A,E);
H=intersezione(m, t);

```

/ la retta t è perpendicolare alla retta m, perché i triangoli DAH e DHE sono congruenti per avere due lati e l'angolo compreso congruenti */*



Esercizio 28

Rappresenta in ambiente virtuale il teorema 20.

■ Regola di comando 37

La retta perpendicolare per un punto ad una retta data si ottiene con il comando

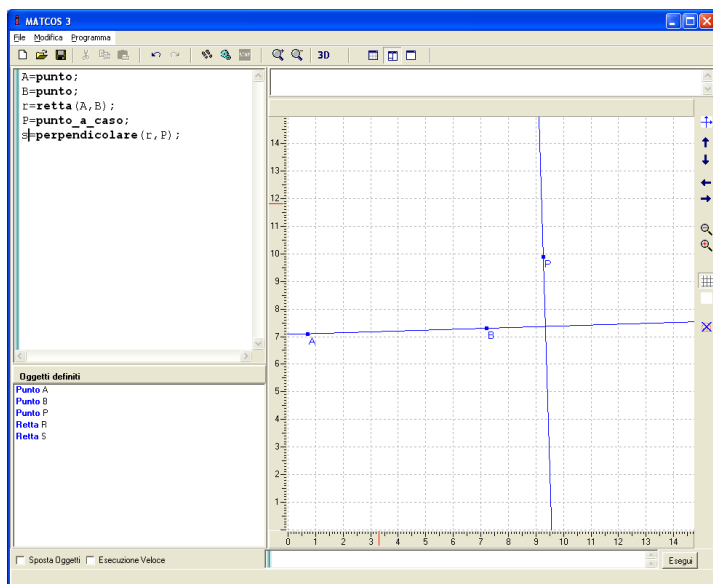
perpendicolare (<retta>, <punto>);

Esempio 21

Data $r = \text{retta}(A, B)$, indicare con r , ed il punto P non appartenente ad essa rappresentare la retta per P perpendicolare ad r .

Soluzione

```
A=punto;  
B=punto;  
r=retta(A,B);  
P=punto_a_caso;  
p=perpendicolare(r,P);
```



■ Teorema 22

Se una retta è perpendicolare ad una di due rette parallele è perpendicolare anche all'altra.

Esercizio 29

Dimostrare il teorema 22.

■ Definizione 15

Si chiama **asse** di un segmento la perpendicolare nel suo punto medio.

■ Teorema 23

Ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante dagli estremi.

Esercizio 30

Dimostrare il teorema 23

■ Definizione 16

Dati n punti $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ a tre a tre non allineati i segmenti di estremi $A_1, A_2, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$, costituiscono una linea chiamata poligonale. Se l'ultimo punto coincide col primo, ovvero $A_1 = A_n$, la poligonale si chiama poligono. I segmenti $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, si chiamano lati della poligonale o del poligono; mentre i punti $A_1, \dots, A_n$ si chiamano vertici.

■ Regola di comando 38

Dati i punti $A_1, \dots, A_n$, i comandi per ottenere la poligonale o il poligono sono, rispettivamente:

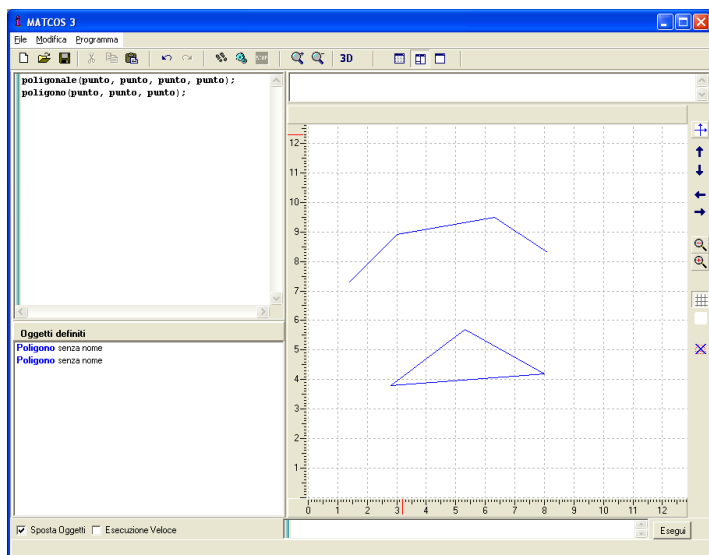
poligonale($A_1, \dots, A_n$);
poligono($A_1, \dots, A_n$);

Esempio 22

Rappresentare una poligonale con 4 vertici ed un poligono con 3 vertici.

Soluzione

poligonale(punto, punto, punto, punto);
poligono(punto, punto, punto);



■ Regola di linguaggio 39

Un poligono di tre lati è il triangolo, un poligono con

4 lati si chiama quadrilatero

5 lati si chiama pentagono

6 lati si chiama esagono

7 lati si chiama ettagono

8 lati si chiama ottagono

.....

■ Definizione 17

Un quadrilatero con due lati opposti paralleli si chiama **trapezio**. I lati opposti si dicono basi, se gli altri due lati, che si dicono obliqui, sono congruenti il trapezio si dice isoscele.

Esempio 23

Rappresentare un trapezio.

Soluzione

A=punto;

B=punto;

r=retta(A,B);

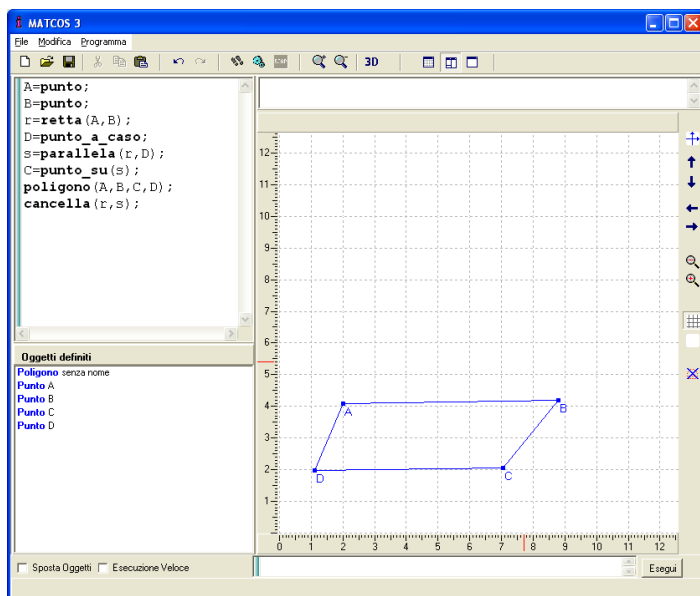
D=punto_a_caso;

s=parallela(r,D);

C=punto_su(s);

poligono(A,B,C,D);

cancella(r,s);



■ Definizione 18

Un quadrilatero con i lati a due a due su rette parallele si chiama **parallelogramma**.

Esempio 24

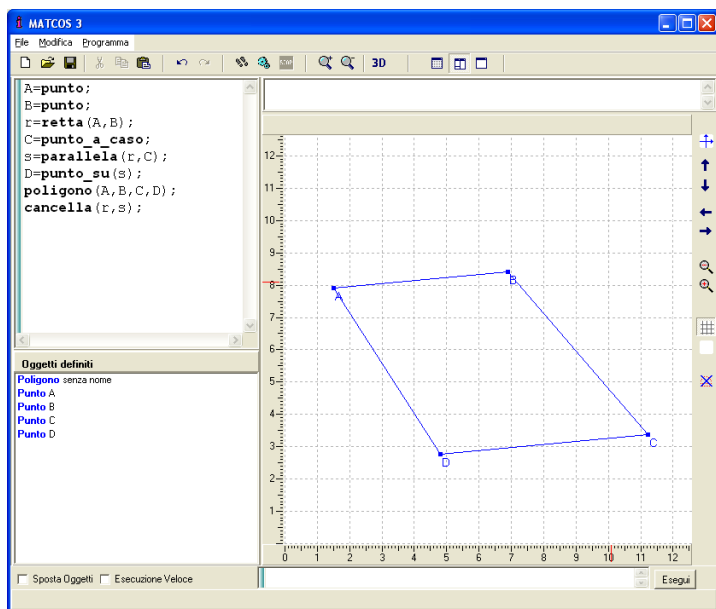
Rappresentare un parallelogramma.

Soluzione

```

A=punto;
B=punto;
r=retta(A,B);
C=punto_a_caso;
s=parallela(r,C);
D=punto_su(s);
poligono(A,B,C,D);
cancella(r,s);

```



Esercizio 30

Rappresentare un parallelogramma e verifica nel modello virtuale che:

1. gli angoli opposti sono congruenti;
2. i lati opposti sono congruenti;
3. le diagonali si dividono scambievolmente a metà.

Soluzione

Aggiungere al programma dell'esempio precedente:

alfa=angolo(B,A,D);

m=ampiezza(alfa);

beta=angolo(D,C,B);

n=ampiezza(beta);

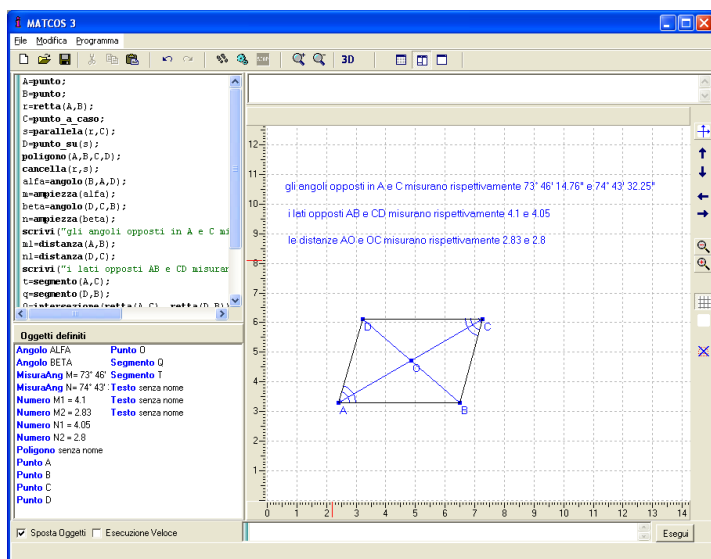
scrivi("gli angoli opposti in A e C misurano rispettivamente ",m," e ",n);

m1=distanza(A,B);

```

n1=distanza(D,C);
scrivi("i lati opposti AB e CD misurano rispettivamente
",m1," e ",n1);
t=segmento(A,C);
q=segmento(D,B);
O=intersezione(retta(A,C), retta(D,B));
m2=distanza(A,O);
n2=distanza(O,C);
scrivi("le distanze AO e OC misurano rispettivamente
",m2," e ",n2);
e far girare varie volte il programma.

```



■ Teorema 24

Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se è vera una qualsiasi delle condizioni:

1. gli angoli opposti sono congruenti;
2. i lati opposti sono congruenti;
3. le diagonali si dividono scambievolmente a metà.

■ Definizione 19

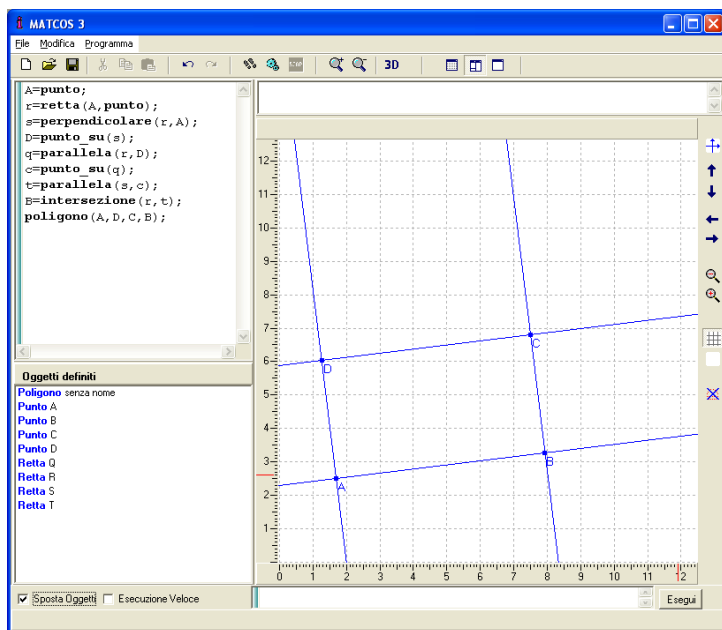
Un parallelogramma con gli angoli retti si chiama **rettangolo**.

Esercizio 31

Rappresentare un rettangolo.

Soluzione

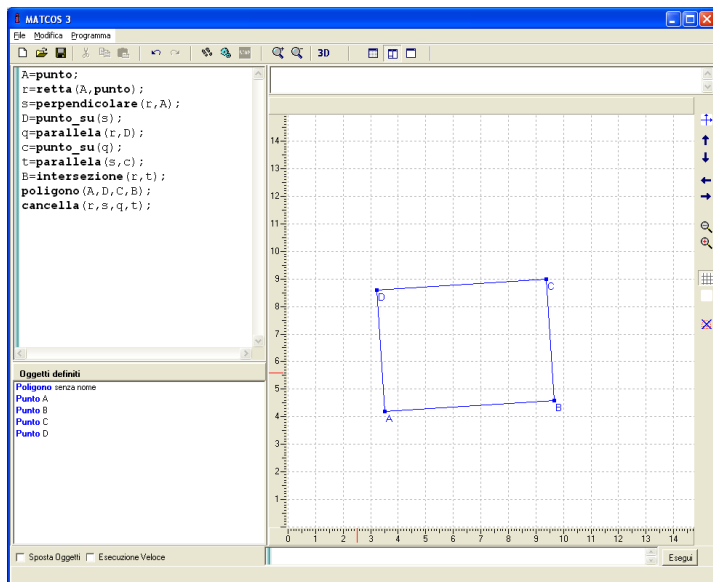
```
A=punto;  
r=retta(A,punto);  
s=perpendicolare(r,A);  
D=punto_su(s);  
q=parallela(r,D);  
c=punto_su(q);  
t=parallela(s,c);  
B=intersezione(r,t);  
poligono(A,D,C,B);
```



Aggiungendo il comando:

`cancella(r,s,q,t);`

si ottiene:



■ Definizione 20

Ogni parallelogramma avente i quattro lati congruenti si dice **rombo**.

Esercizio 32

Rappresentare nel modello virtuale un rombo.

■ Teorema 25

Un parallelogramma è un rombo se e solo se le diagonali sono perpendicolari.

Indice analitico

Assiomi

Assioma 1	9
Assioma 2	9
Assioma 3	13
Assioma 4	15
Assioma 5	16
Assioma 6	30
Assioma 7	32
Assioma 8	44
Assioma 9	55

Definizioni

Definizione 1	10
Definizione 2	22
Definizione 3	24
Definizione 4	30
Definizione 5	40
Definizione 6	42
Definizione 7	46
Definizione 8	59
Definizione 9	60
Definizione 10	62
Definizione 11	65
Definizione 12	65
Definizione 13	70
Definizione 14	70
Definizione 15	75
Definizione 16	75
Definizione 17	77
Definizione 18	78
Definizione 19	81
Definizione 20	82

Regole	
Regola 1	7
Regola 2	8
Regola 3	11
Regola 4	11
Regola 5	13
Regola 6	14
Regola 7	14
Regola 8	19
Regola 9	21
Regola 10	21
Regola 11	23
Regola 12	23
Regola 13	24
Regola 14	24
Regola 15	25
Regola 16	26
Regola 17	27
Regola 18	29
Regola 19	30
Regola 20	33
Regola 21	37
Regola 22	37
Regola 23	41
Regola 24	42
Regola 25	44
Regola 26	45
Regola 27	47
Regola 28	48
Regola 29	49
Regola 30	53
Regola 31	64
Regola 32	65
Regola 33	70

Regola 34	71
Regola 35	71
Regola 36	71
Regola 37	73
Regola 38	76
Regola 39	77

Teoremi

Teorema 1	18
Teorema 2	20
Teorema 3	35
Teorema 4	39
Teorema 5	42
Teorema 6	43
Teorema 7	44
Teorema 8	48
Teorema 9	49
Teorema 10	51
Teorema 11	53
Teorema 12	56
Teorema 13	57
Teorema 14	59
Teorema 15	61
Teorema 16	61
Teorema 17	62
Teorema 18	66
Teorema 19	68
Teorema 20	69
Teorema 21	71
Teorema 22	75
Teorema 23	75
Teorema 24	80
Teorema 25	82

Esempi

Esempio 1	8
Esempio 2	10
Esempio 3	12
Esempio 4	14
Esempio 5	15
Esempio 6	16
Esempio 7	17
Esempio 8	21
Esempio 9	23
Esempio 10	25
Esempio 11	26
Esempio 12	27
Esempio 13	29
Esempio 14	30
Esempio 15	32
Esempio 16	33
Esempio 17	37
Esempio 18	46
Esempio 19	60
Esempio 20	64
Esempio 21	74
Esempio 22	76
Esempio 23	77
Esempio 24	78

Esercizi

Esercizio 1	13
Esercizio 2	13
Esercizio 3	17
Esercizio 4	18
Esercizio 5	18
Esercizio 6	18
Esercizio 7	21

Esercizio 8	35
Esercizio 9	37
Esercizio 10	37
Esercizio 11	38
Esercizio 12	40
Esercizio 13	40
Esercizio 14	42
Esercizio 15	46
Esercizio 16	46
Esercizio 17	46
Esercizio 18	47
Esercizio 19	47
Esercizio 20	48
Esercizio 21	48
Esercizio 22	49
Esercizio 23	66
Esercizio 24	67
Esercizio 25	69
Esercizio 26	70
Esercizio 27	71
Esercizio 28	73
Esercizio 29	75
Esercizio 30	75
Esercizio 31	81
Esercizio 32	82
Enti primitivi	3

Bibliografia

[1] Costabile F.A.	Il calcolatore, motore dell'azione didattica e scientifica in matematica. Quaderni di Matematica N.2 – Dip. Mat. Un. Lecce Edizioni del Grifo (LE) (2004) pp, 144-160
[2] Costabile F.A. Serpe A.	Le projet MATCOS LAGRANGE et al. (edr.) Actes du Colloque Européen ITEM “Integration des Technologies dans l’Enseignement des Mathematique” - Ecole, IUFM, Riems, France 2003, URL http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/edutice-00001367/en/
[3] Euclide, Gli Elementi	(a cura Frajese A. e Maccioni M.) UTET 1970
[4] Hilbert D.	Fondamenti della Geometria (traduzione dal tedesco di P. Canetta) Feltrinelli (Milano) 1970.