APPROFONDIMENTI

SUL MODULO 3

1. Confronto e somma dei segmenti
(Cif. 1° livello Pag. 171)

Indichiamo l'insieme dei segmenti con S, così che con

$$a \in S$$

Intendiamo dire che l'oggetto indicato con a è un segmento.
È possibile definire nell'insieme S due operazioni fondamentali quali il confronto e la somma. Entrambe queste operazioni si basano sul seguente Enunciato che noi ammettiamo:

Enunciato 1
Dati un segmento AB ed una semiretta, di origine O, fissato su di essa un punto C, esiste su questa semiretta un segmento che ha un estremo in C ed è congruente (uguale) ad AB. (Figura 1)

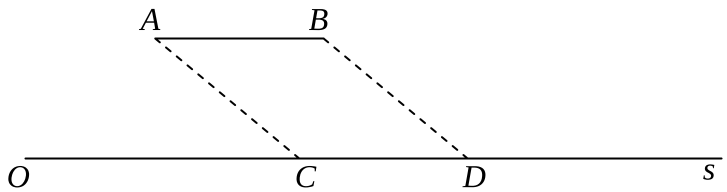


Figura 1 – Segmenti AB e CD congruenti.

È possibile ora definire il confronto tra due segmenti. Infatti se AB e CD sono due segmenti, consideriamo su una semiretta di origine O, due altri segmenti OP e OQ tali che siano rispettivamente congruenti ad AB e CD, ciò è possibile per l'Enunciato 1. I segmenti OP e OQ possono risultare uguali, allora lo saranno anche AB e OD, oppure possono essere uno parte dell'altro; se per esempio *OQ* è parte di *OP*, diremo che *AB* è maggiore di *CD* e scriveremo

$$AB > CD.$$

Nel caso opposto diremmo che AB è minore di CD e scriveremo

$$AB < CD.$$

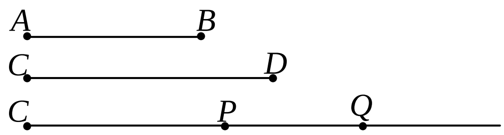


Figura 2 – I Segmenti *OP* e *OQ* sono congruenti ad *AB* e *CD*.

L'

Enunciato 1 consente di definire in *S* anche l'operazione di somma. Infatti, dati due segmenti *AB* e *CD*, se ne possono considerare due altri *MN* e *NP* congruenti ad essi ed adiacenti (Figura 3), allora il segmento *MP* si dice somma di *AB* e *CD* e si scrive anche

$$MP = MN + NP$$

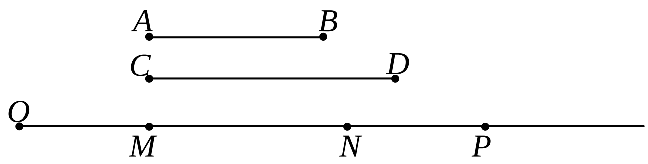


Figura 3 – Segmento somma *MP*.

Possiamo così formulare la

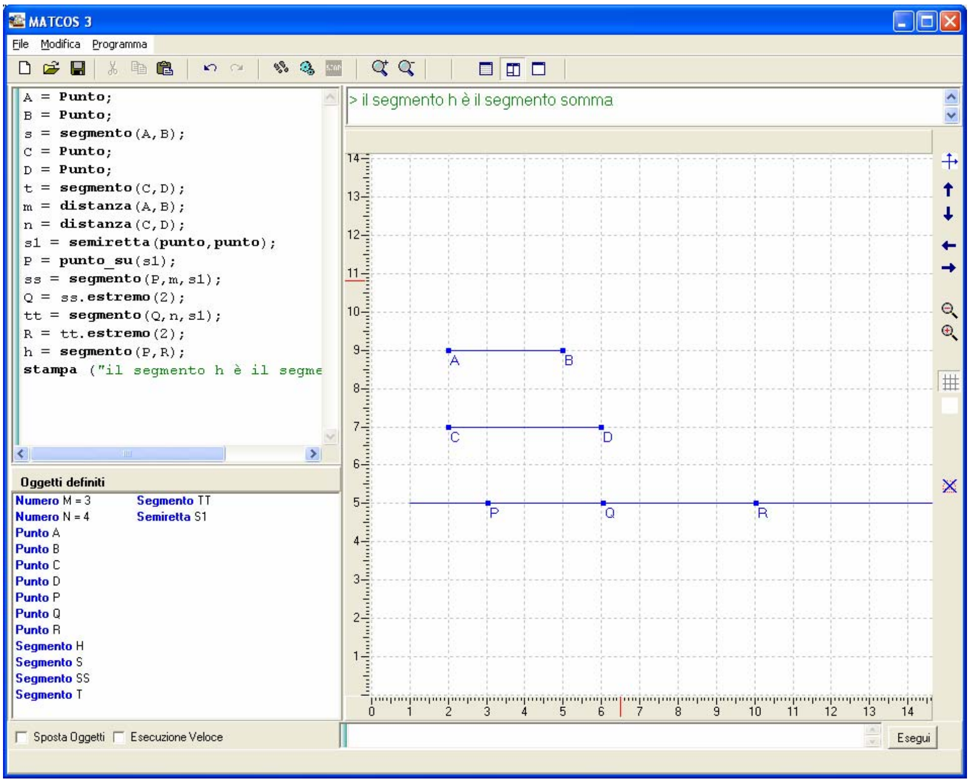
Proposizione 1

Nell'insieme *S* è possibile definire l'operazione di somma, indicata con "+", cioè dati due elementi di *S* esiste uno ed uno solo elemento di *S* che è chiamato loro somma.

E' possibile costruire con un programma Matcos la somma dei due segmenti assegnati, il seguente codice è adatto allo scopo:

```
A = Punto;
```

```
B = Punto;
s = segmento(A,B);
C = Punto;
D = Punto;
t = segmento(C,D);
m = distanza(A,B);
n = distanza(C,D);
s1 = semiretta(punto,punto);
P = punto_su(s1);
ss = segmento(P,m,s1);
Q = ss.estremo(2);
tt = segmento(Q,n,s1);
R = tt.estremo(2);
h = segmento(P,R);
stampa ("il segmento h è il segmento somma");
```



Se i segmenti che si sommano sono congruenti, il segmento somma che si ottiene si chiama multiplo, più precisamente possiamo dire

Definizione 1

Se n è un numero naturale maggiore o uguale a 2, la somma di n segmenti congruenti ad un segmento dato AB si chiama **multiplo** di AB secondo n.

Facendo uso (ma forse abuso!) di questa definizione, a volte si parla di "moltiplicazione" di un segmento AB per un numero $n \geq 2$, intendendo con ciò il segmento multiplo di AB secondo n. Il multiplo di AB secondo n si indica con nAB.

È opportuna anche la

Definizione 2

Se un segmento è multiplo di un altro, secondo un intero $n \geq 2$, quest'ultimo si dice **sottomultiplo** del primo secondo n.

Abusando anche di questa definizione possiamo parlare di "divisione" di un segmento in n parti congruenti, intendendo con ciò trovare un segmento che sia sottomultiplo del segmento dato secondo n.

Il sottomultiplo di un segmento AB secondo n si indica con $\frac{1}{n}$AB. Il sottomultiplo di un segmento AB secondo il numero 2 si chiama anche **metà** del segmento dato ed il punto che lo divide nelle due parti componenti si chiama **punto medio** (Figura 4) dei due estremi del segmento dato.

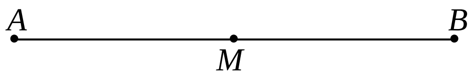


Figura 4 – $AM = \frac{1}{2}AB$; M è il punto medio di A e B.

Esercizio 1

Dati due segmenti AB e CD con $AB > CD$ è possibile determinare uno ed uno solo segmento MN tale che $AB = MN + CD$?

Esercizio 2

Esiste nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ una proprietà analoga a quella espressa nell'esercizio precedente?

Se hai risolto l' Esercizio 1, ti appare giustificata la successiva

Definizione 3

Se AB e CD sono due segmenti tali che $AB > CD$ il segmento MN tale che $AB = MN + CD$ si chiama **differenza** tra AB e CD e si scrive anche:

$$AB - CD = MN.$$

Talvolta questa operazione si chiama "sottrazione" tra segmenti.

Esercizio 3

In S qual è la differenza sostanziale tra le operazioni di addizione e sottrazione?

2. Confronto e somma di angoli.

È possibile operare nell'insieme degli angoli, $\mathscr{A}$, in modo simile a quanto fatto nell'insieme S. Pertanto, per ragioni di brevità, ci limitiamo a riportare i seguenti enunciati.

Enunciato 2

Dati nel piano, un angolo $\widehat{ab}$ e una semiretta, a', di origine O, ed un verso di rotazione, esiste una ben determinata semiretta di origine O, b', tale che l'angolo $\widehat{a'b'}$, secondo il verso fissato, è congruente ad $\widehat{ab}$ (Figura 5)

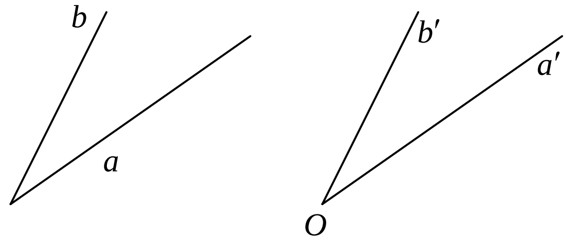


Figura 5 – $\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}$.

Enunciato 3

Dati due angoli qualsiasi si verifica uno ed uno solo dei seguenti casi:

$$\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} \text{ o } \widehat{ab} < \widehat{a'b'} \text{ o } \widehat{ab} > \widehat{a'b'}.$$

È possibile definire, in modo analogo a quanto fatto con i segmenti, la somma di angoli:

Enunciato 4

In $\mathscr{A}$ si può definire l'operazione di **somma** indicata con "+", cioè dati due angoli esiste uno ed uno solo angolo chiamato loro somma.

Esercizio 4

Ripetere in $\mathscr{A}$ l'esercizio 15 (vedi pag. 55).

Definizione 4

Dati due angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ con $\widehat{ab} > \widehat{cd}$, l'angolo $\widehat{mn}$ tale che $\widehat{ab} = \widehat{cd} + \widehat{mn}$ si chiama differenza degli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ e si scrive

$$\widehat{mn} = \widehat{ab} - \widehat{cd}.$$

Enunciato 5

Somme e differenze di angoli congruenti sono congruenti.

Risulta utile la seguente

Definizione 5

Si dicono **supplementari** due angoli la cui somma è un angolo piatto.

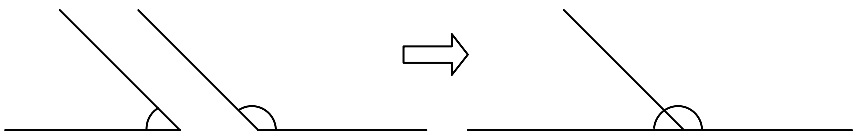


Figura 6 – Angoli supplementari.

Possiamo formulare, con le nozioni finora acquisite, la seguente

Proposizione 2

Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti. In simboli:

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{A} \\ \alpha + \beta = angolo\ piatto \\ \alpha + \gamma = angolo\ piatto \end{pmatrix} \Rightarrow (\beta \equiv \gamma)$$

Dimostrazione

Poiché gli angoli piatti sono congruenti, β e γ sono congruenti perché differenze di angoli congruenti così come affermato dall'enunciato 5.

È utile anche la

Definizione 6

Due angoli si dicono **opposti al vertice** se i lati dell'uno si trovano sul prolungamento di quelli dell'altro.

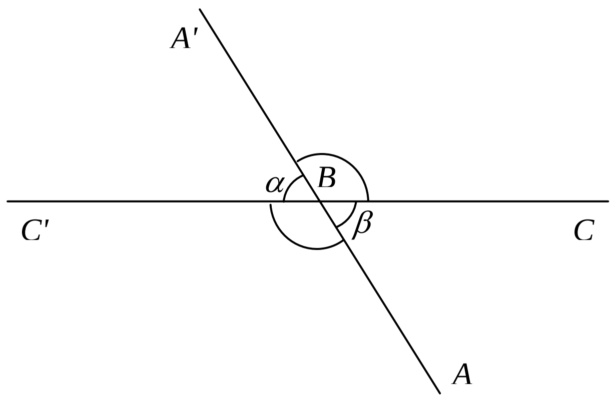


Figura 7 – Angoli opposti al vertice.

Esercizio 5

Angoli opposti al vertice sono congruenti. In simboli:

$(\alpha, \beta \in \mathcal{A},\ \alpha$ e β opposti al vertice$) \Rightarrow (\alpha \equiv \beta)$.

Suggerimento

Dalla Figura 7**,** α e β sono entrambi adiacenti all'angolo $C\hat{B}A'$: applica la proposizione 1 e concludi con la tesi.

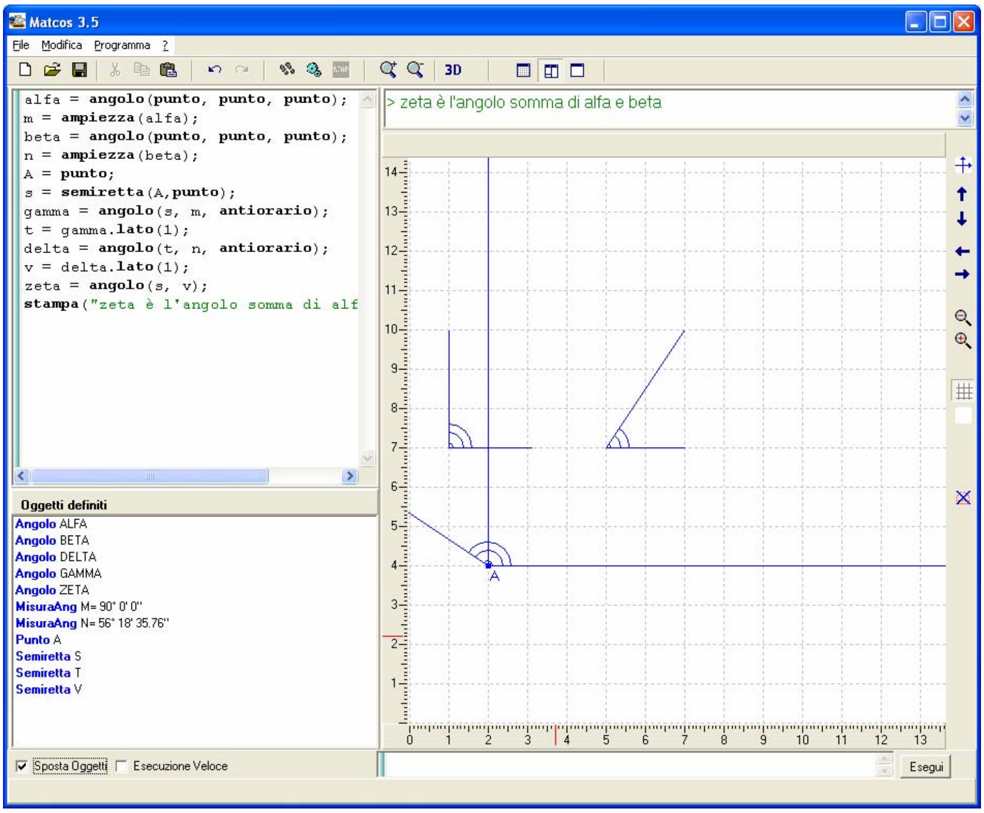
In modo perfettamente analogo ai segmenti, anche per gli angoli si definiscono il **multiplo** e il **sottomultiplo** secondo un intero n ≥ 2 : essi saranno indicati rispettivamente con

$$n\widehat{ab} \text{ e } \frac{1}{n}\widehat{ab}.$$

Di particolare interesse risultano il **multiplo** ed il **sottomultiplo** di un angolo secondo l'intero n=2: gli angoli che si ottengono si chiamano rispettivamente **doppio** e **metà** dell'angolo dato. In quest'ultimo caso è importante considerare il raggio che genera i due angoli congruenti.

È possibile costruire con un programma Matcos l'angolo somma di due angoli assegnati:

```
alfa = angolo(punto, punto, punto);
m = ampiezza(alfa);
beta = angolo(punto, punto, punto);
n = ampiezza(beta);
A = punto;
s = semiretta(A,punto);
gamma = angolo(s, m, antiorario);
t = gamma.lato(1);
delta = angolo(t, n, antiorario);
v = delta.lato(1);
zeta = angolo(s, v);
stampa("zeta è l'angolo somma di alfa e beta");
```



3. Esercizi supplementari

- Punto
  1. Dare in forma scritta una spiegazione e in forma grafica una rappresentazione del concetto di *punto geometrico*.
  2. Scrivere un insieme costituito da tre punti.
  3. Cos'è una *figura geometrica*?
  4. Rappresentare una figura costituita da quattro punti.

- Retta
  1. Disegnare l'immagine di una parte di retta ed elencare gli enunciati che caratterizzano la retta.
  2. Se $\mathcal{R}$ è l'insieme delle rette e $\mathcal{F}$ l'insieme delle figure, viene $\mathcal{R} \in \mathcal{F}$ o $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$

3. Disegna tre punti e traccia le rette che li congiungono a due a due. Quante sono? Sapresti formulare un problema che dal punto di vista quantitativo è equivalente al precedente

   Distinguere i due casi: i punti sono allineati o no. Considera tre oggetti, raggruppali a gruppi di due…… .

4. Disegnare quattro punti, tre dei quali mai allineati, e tracciare le rette che li congiungono a due a due. Quante sono? Formulare un problema quantitativamente equivalente.

5. L'insieme intersezione di due rette di un piano può essere determinato da:

	VERO	FALSO
a) un punto	☐	☐
b) due punti	☐	☐
c) l'insieme vuoto	☐	☐
d) una retta	☐	☐

   Rappresenta graficamente le situazioni possibili

6. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a) Fissato un punto P su una retta r, passa per P almeno un'altra retta $s \neq r$
   b) Se due rette hanno in comune due punti, esse coincidono.
   c) Le rette sono in numero finito.
   d) La retta è un insieme illimitato di punti.

7. Siano P, $Q \in \mathscr{P}$ e r, $s \in \mathscr{R}$. Se $P \in r$ e $Q \in s$, esiste $t \in \mathscr{R}$ tale che $P, Q \in t$?

8. Sia $r \in \mathscr{R}$: esiste un suo punto di inizio o un suo punto di fine?

- Segmento - Semiretta

  1. Dare in forma scritta una spiegazione e in forma grafica una rappresentazione del concetto di semiretta.
  2. Disegnare le immagini di due semirette r_A e r_B tali che $r_A \cap r_B = \varnothing$.
  3. Cos'è un segmento di estremi A e B? Cos'è un segmento nullo?

4. Quando due segmenti si dicono consecutivi? E quando adiacenti?
5. Se su di una retta si segnano 1, o 2, o 3 punti, quante semirette e quanti segmenti risultano rispettivamente determinati sulla retta?
6. Considerando quattro punti M, N, P, Q su una retta r, rappresentare graficamente le seguenti relazioni fra i segmenti MN e PQ:
   a. $PQ \subset MN$;
   b. $MN \subset PQ$;
   c. $PQ \cap MN = PQ$.
7. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a. Un segmento è la parte di una retta compresa fra due suoi punti.
   b. Se un segmento AB ha intersezione non vuota con CD, allora il punto C non è interno ad AB.
   c. Se i segmenti AB e CD, appartenenti alla stessa retta, hanno un solo punto in comune, risultano adiacenti.
   d. Se C è un punto interno ad AB e D è ad esso esterno, ma sulla retta di AB, il segmento CD ha intersezione non vuota con AB.

   Rappresentare graficamente le situazioni.
8. Determina, nei vari casi, l'insieme intersezione di due segmenti di un piano.

   Può essere vuoto, un punto o un segmento.

- Angolo
  1. Dare in forma scritta una spiegazione e in forma grafica una rappresentazione del concetto di angolo e delle sue varie forme (convesso, concavo, piatto, nullo e giro) anche con un programma Matcos.
  2. Quando due angoli si dicono consecutivi? E quando adiacenti? Anche con un programma Matcos.
  3. Dato un angolo convesso, una sua corda ed una semiretta interna all'angolo, dire se l'insieme intersezione della corda con la semiretta è vuoto. Anche con un programma Matcos.

4. Disegnare due angoli convessi la cui somma è un angolo piatto. Anche con un programma Matcos.
5. Rappresentare graficamente due angoli con il vertice in comune in ciascuna delle situazioni seguenti:
   a. hanno per intersezione un angolo;
   b. hanno per intersezione uno dei due lati;
   c. hanno per intersezione il solo vertice;
   d. la loro somma è un angolo concavo;
   e. la loro somma è un angolo giro.

   Anche con un programma Matcos.
6. Disegnare due angoli aventi in comune il vertice, un lato e un punto esterno al lato. Tali angoli sono uno interno all'altro? Anche con un programma Matcos.
7. Fissate nel piano tre semirette aventi la stessa origine, quanti angoli convessi e quanti angoli concavi esse individuano?
8. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a. All'angolo $\widehat{rs}$ appartiene ogni segmento di estremi A e B con $A \in r$ e $B \in s$.
   b. Se $P \in \widehat{AOB}$, la semiretta r_o passante per P è esterna ad $\widehat{AOB}$.
   c. L'unione di due angoli adiacenti è un semipiano.
   d. Un angolo contiene un numero finito di punti.
9. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a. Un angolo nullo è un insieme infinito di punti (una semiretta).
   b. Un angolo convesso contiene per intero ogni sua corda; uno concavo ne contiene solo gli estremi.
   c. Il segmento che unisce un punto interno ed un punto esterno di un angolo convesso ha in comune con il contorno dell'angolo due punti.
   d. Un angolo giro è un piano sul quale è stato fissato un punto (vertice dell'angolo).

10. Disegnare un angolo convesso ed una sua corda; una semiretta avente l'origine del vertice dell'angolo e un altro punto sulla corda è interna o esterna all'angolo?

11. Dato un angolo convesso $\widehat{AOB}$ disegnare:

    a) un segmento i cui estremi P e Q sono punti interni, come sono tutti gli altri punti di esso? E le semirette OP e OQ?

    b) Un segmento PQ avente un estremo su un lato e l'altro in un punto interno all'angolo, come sono tutti gli altri punti di esso? E le semirette OP e OQ?

12. Ripetere l'esercizio precedente considerando i seguenti casi:

    c) P e Q sono entrambi esterni;
    d) Uno di essi è esterno e l'altro giace su un lato;
    e) Uno di essi è esterno e l'altro interno.

- Confronto e somma di segmenti

1. In che relazione stanno due segmenti AB e CD per cui sono false le seguenti relazioni: $AB > CD$, $CD > AB$? Scrivere un programma Matcos.

2. Sia AB un segmento e P un suo punto tale che $AP \equiv PB$. Sia C un punto interno al segmento PB. Quali delle seguenti relazioni sono vere?

    a) $AB < AC$;

    b) $AB \equiv PC$;

    c) $AC > PC$;

    d) $PC < PB$.

    Scrivere un programma Matcos.

3. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:

    a) Su ogni retta r, a partire da un suo punto P e da parti opposte di questo, esistono due segmenti congruenti a un segmento assegnato.
    b) Il segmento nullo è minore di ogni altro segmento non nullo.
    c) L'operazione di controllo S genera una relazione di equivalenza.
    d) Se due segmenti sono congruenti, la loro differenza è il segmento nullo.

    Scrivere un programma Matcos.

4. Disegnare un segmento AB e il segmento $CD = 4AB$. Scrivere un programma Matcos.
5. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a) Dati due segmenti non congruenti, possiamo sempre considerare un multiplo del minore che supera il maggiore.
   b) Se $AB - CD = EF$, allora $EF + CD = AB$.
   c) Dati due segmenti AB e CD è sempre possibile eseguire la loro differenza?

   Scrivere un programma Matcos.
6. Siano dati due segmenti adiacenti AB e CD tali che $AB = 2BC$. Giustificare che $AC = 3BC$. Scrivere un programma Matcos.
7. Dati due segmenti AB e CD tali che $CD < AB$, dire se sono valide le uguaglianze:

   $$(AB + CD) + (AB - CD) = 2AB$$
   $$(AB + CD) - (AB - CD) = 2CD\,.$$

   Scrivere un programma Matcos.
8. Su di una retta r siano dati tre segmenti AB, CD e EF tali che:

   $$AB \equiv CD\,,\ CD \equiv EF\,,\ AB \cap CD \cap EF = \varnothing\,,\ BC \equiv DE\,.$$

   Stabilire se $AC \equiv DF$. Scrivere un programma Matcos.
9. Assegnati tre segmenti AB, CD e EF, rappresentare il segmento $AB + CD - EF$. La sua costruzione è sempre possibile? Scrivere un programma Matcos.
10. Assegnati tre segmenti AB, CD e EF, dimostrare che, se $AB > CD$ e $CD > EF$, allora $AB - EF > CD - EF$.

- Confronto e somma di angoli.
  1. Disegna due rette che si incontrano. Quante sono le coppie di angoli opposti al vertice? Scrivere un programma Matcos.
  2. Dire quali dei seguenti enunciati sono falsi:
     a) Dato un angolo e una semiretta in un piano, si può considerare in ciascuno dei due sensi uno ed uno solo angolo congruente a quello dato.
     b) L’angolo nullo è minore di ogni altro angolo non nullo.

c) Due angoli la cui somma sia congruente ad un angolo giro si dicono supplementari.
d) Due angoli supplementari sono adiacenti.
e) Angoli opposti al vertice sono congruenti.

Scrivere un programma Matcos.

3. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:

   a) Se due angoli sono congruenti, la loro somma è un angolo piatto.
   b) Somme di angoli congruenti sono congruenti.
   c) Se due angoli sono congruenti, la loro differenza è l'angolo nullo.
   d) Due angoli supplementari sono acuti.
   e) Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.

   Scrivere un programma Matcos.

4. Siano assegnate le tre semirette OA, OB e OC, con OB interna all'angolo $A\hat{O}C$. Determinare l'unione e l'intersezione dei due insiemi costituenti gli angoli $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$. Scrivere un programma Matcos.

5. Quali sono le condizioni che devono verificare due angoli affinché sia possibile costruire la loro differenza? Scrivere un programma Matcos.

6. Il punto O è origine comune alle semirette a, b, c e d, che si susseguono nell'ordine alfabetico e sono tali $\widehat{ab} \equiv \widehat{cd}$. Verificare che $\widehat{ac} \equiv \widehat{bd}$ e che gli angoli $\widehat{bc}$ e $\widehat{ad}$ hanno la stessa bisettrice. Scrivere un programma Matcos.

7. Siano a, b, c, d $\in \mathfrak{I}$ aventi la stessa origine e tali che $\widehat{ad}$ e $\widehat{bc}$ abbiano la stessa bisettrice. Verificare che $\widehat{ab} \equiv \widehat{cd}$. Scrivere un programma Matcos.

8. Siano dati due angoli consecutivi $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ tali che $A\hat{O}B = 2B\hat{O}C$. Verificare che $A\hat{O}C = 3B\hat{O}C$. Scrivere un programma Matcos.

9. Dette m e n le bisettrici rispettive di due angoli consecutivi $\widehat{rs}$ e $\widehat{st}$. Giustificare che $\widehat{mn} = \frac{1}{2}(\widehat{rs} + \widehat{st})$. Scrivere un programma Matcos.

10. Assegnati due angoli consecutivi $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}B > B\hat{O}C$, si conduca la bisettrice OD dell'angolo $A\hat{O}C$ e si dimostri che

$$B\hat{O}D = \frac{1}{2}(A\hat{O}B - B\hat{O}C).$$

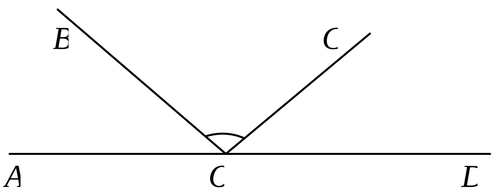
11. Dimostrare che se due angoli consecutivi sono supplementari essi sono adiacenti.

12. Due angoli la cui somma sia congruente ad un angolo retto si dicono **complementari**. Angoli complementari di angolo congruenti sono congruenti? Giustificare la risposta.

13. Verificare che se due angoli hanno angoli supplementari congruenti hanno congruenti anche gli angoli complementari.

14. Due angoli adiacenti e congruenti sono retti?

15. Nella seguente figura $B\hat{O}C$ è un angolo retto.



Gli angoli $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ sono complementari?

4. Triangoli e poligoni

4.1. Classificazione dei triangoli.

Abbiamo detto che un triangolo è formato da tre segmenti detti lati, disposti in un ordine particolare. Può capitare che due o tutti e tre questi segmenti siano congruenti, in tali casi è opportuno assegnare nomi speciali.
Infatti

Definizione 7

Un triangolo che ha due lati congruenti si chiama ***isoscele***, l'ulteriore lato, a volte chiamasi ***base*** (Figura 8). Gli angoli adiacenti alla base si dicono ***angoli alla base***. L'insieme dei triangoli isosceli si indica con $\mathfrak{T}_i$.

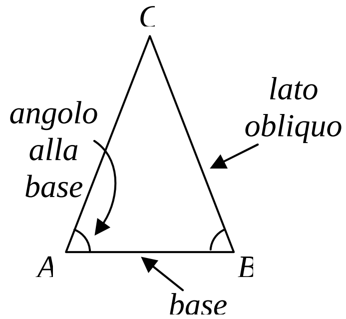


Figura 8 – Triangolo isoscele $AC \equiv BC$.

Definizione 8

Un triangolo con tutti e tre i lati congruenti tra loro si chiama ***equilatero***. L'insieme dei triangoli equilateri si indica con $\mathfrak{T}_e$.

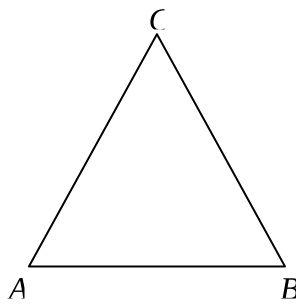


Figura 9 – Triangolo equilatero $AC \equiv AB \equiv BC$.

Definizione 9

Ogni triangolo che non sia isoscele o equilatero si chiama ***scaleno***. L'insieme dei triangoli scaleni si indica con $\mathcal{T}_s$.

Esercizio 6

Stabilire le relazioni di inclusione tra gli insiemi $\mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}_e$, $\mathcal{T}_s$ e $\mathcal{T}$.

Si può avere una classificazione dei triangoli anche riguardo agli angoli interni. Infatti

Definizione 10

Un triangolo con un angolo retto, si chiama ***rettangolo***; con un angolo ottuso si chiama ***ottusangolo***; con tutti e tre gli angoli acuti si chiama ***acutangolo***. Si indica con $\mathcal{T}_r$, $\mathcal{T}_o$ e $\mathcal{T}_a$ rispettivamente l'insieme dei triangoli rettangoli, ottusangoli e acutangoli.

Esercizio 7

Esiste qualche relazione di inclusione tra gli insiemi $\mathcal{T}_r$, $\mathcal{T}_o$ e $\mathcal{T}_a$?

4.2. Un'applicazione del 1° e 2° criterio di uguaglianza (congruenza) dei triangoli. (1° livello, vol. 1, pag. 206)

Problema 1

Determinare in aperta campagna la distanza di due punti A e B, separati da un ostacolo (un laghetto, un gruppo di case, un'altura, ecc.) che ne impedisca la misura diretta.

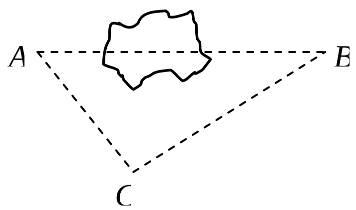


Figura 10 – Punti *A* e *B* separati da un ostacolo.

Soluzione

Scelto un punto *C* (Figura 10) da cui *A* e *B* siano entrambi visibili ed accessibili, misuriamo direttamente le distanze *CA* e *CB* e poi determiniamo l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{C}B$ mediante il teodolite. Con questi tre elementi, il triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$ risulta completamente determinato (nel senso che siamo in grado di riprodurne uno ad esso congruente), onde si capisce che con calcoli opportuni possiamo trovare anche la lunghezza del lato *AB*. Anzi, se non occorre una grande esattezza, possiamo disegnare su di un foglio, l'immagine in piccolo di $A\overset{\triangle}{B}C$ (ad esempio, riducendo ciascuna delle lunghezze di *CA* e *CB* ad $\frac{1}{100}$ della vera grandezza) e poi misurare direttamente sul disegno la lunghezza di *AB*, riportare, poi, la lunghezza alla sua vera grandezza, moltiplicando per 100 il risultato ottenuto.

Problema 2

Determinare la distanza di un dato punto *A* da un altro punto *B*, visibile da *A* ma inaccessibile (ad esempio si trova al di là di un corso d'acqua che non si possa agevolmente passare (Figura 11)

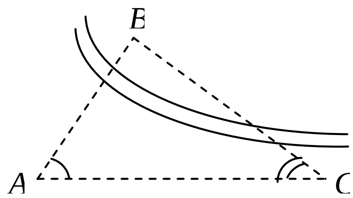


Figura 11 – *B* inaccessibile da *A*.

Soluzione

Fissa un terzo punto C visibile ed accessibile da A e misura direttamente la distanza AC e le ampiezze degli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ACB}$.

Con questi tre elementi, il triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ risulta completamente determinato, onde anche qui si capisce che con calcoli opportuni potrai trovare anche la distanza AB.

Osservanza storica

Sembra che di un procedimento simile a quello esposto si servisse, già circa nel 600 a. C., il filosofo e matematico greco ***Talete di Mileto*** per determinare, con meraviglia dei suoi contemporanei, a quale distanza si trovasse una nave in mare.

Il secondo criterio di congruenza dei triangoli, oltre alle applicazioni viste, è anche utile per sviluppare altre proprietà geometriche.

Proposizione 3

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

In simboli:

$$(\overset{\triangle}{ABC} \in \mathfrak{T}_i,\ AC \equiv BC) \Rightarrow (\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}).$$

Verifica

Invertiamo l'angolo $A\widehat{C}B$ in modo che le due semirette CA e CB vadano a coincidere con le CB e CA rispettivamente. Essendo $CA \equiv CB$, il punto A va a sovrapporsi esattamente su …., mentre B va a sovrapporsi esattamente su …, sicché l'angolo alla base $\widehat{A}$ va a coincidere con l'altro angolo alla base …, e perciò è congruente ad esso.

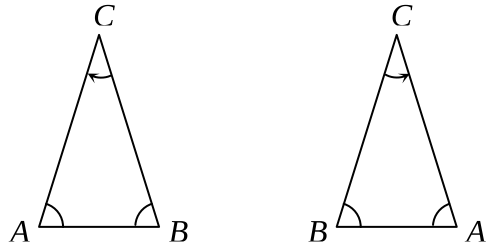


Figura 12 – *Triangolo isoscele* $AC \equiv BC$.

Esercizio 8

Dai un'altra dimostrazione della Proposizione 3.

Suggerimento

Considera la bisettrice dell'angolo $A\widehat{C}B$ ed i triangoli … da essa individuati. Applica il primo criterio di congruenza. Concludi.

Esercizio 9

Dimostrare che in un triangolo equilatero tutti e tre gli angoli interni sono congruenti.

Suggerimento

Applica la Proposizione 3.

Vale anche il risultato inverso della Proposizione 3, cioè:

Proposizione 4

Se un triangolo ha gli angoli alla base congruenti, allora esso è isoscele.

In simboli:

$$(A\overset{\triangle}{B}C \in \mathfrak{T},\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{CAB}) \Rightarrow (A\overset{\triangle}{B}C \in \mathfrak{T}_i).$$

Verifica

Sia, nel triangolo di Figura 12, $C\widehat{A}B \equiv C\widehat{B}A$; dobbiamo far vedere che $CA \equiv CB$. A tal scopo ribaltiamo il triangolo in modo che il lato AB invertito si sovrapponga a se stesso e il vertice C cada, rispetto a codesto lato, dalla stessa parte. Essendo $C\widehat{A}B \equiv C\widehat{B}A$, risulta che le due semirette AC e BC si sovrappongono scambievolmente, sicché il vertice C si sovrappone a se stesso. Quindi, il lato AC va a coincidere col lato BC, cioè $CA \equiv CB$.

4.3. Relazioni fra gli elementi di un triangolo.

Teorema 1

Ogni angolo esterno ad un triangolo è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti ad esso (cioè opposti).

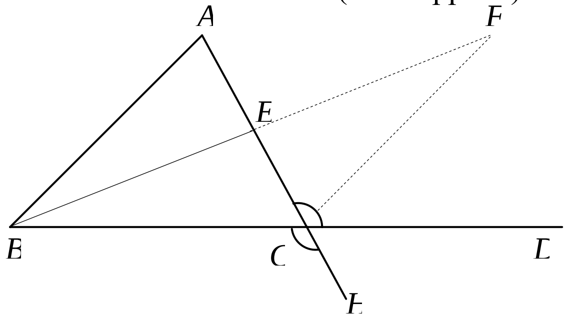


Figura 13 – *Triangolo isoscele* $AC \equiv BC$.

Dimostrazione

Nel triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$, consideriamo l’angolo esterno $A\widehat{C}D$ ottenuto prolungando *BC* e dimostriamo anzitutto che è maggiore di $B\widehat{A}C$. Se *E* è il punto medio di *AC*, congiungiamo *B* con *E*, e sul prolungamento di BE prendiamo $EF \equiv BE$; poi tracciamo *CF*, che sarà interno all’angolo $A\widehat{C}D$. I triangoli $A\overset{\triangle}{E}B$ e $C\overset{\triangle}{E}F$ hanno $EA \equiv EC$, $EB \equiv EF$ e $A\widehat{E}B \equiv C\widehat{E}F$, perciò sono … e ne segue $B\widehat{A}E \equiv E\widehat{C}F$. Dunque $B\widehat{A}C \equiv A\widehat{C}F$, e quindi $A\widehat{C}D$, che è maggiore di $A\widehat{C}F$, è maggiore anche di $B\widehat{A}C$. Abbiamo dunque dimostrato che un angolo esterno di un triangolo è maggiore dell’angolo interno opposto al lato prolungato; analogamente, se prolunghiamo *AC* in *CH*, abbiamo che l’angolo esterno $B\widehat{C}H$ è maggiore di $A\widehat{B}C$, ed essendo $A\widehat{C}D \equiv B\widehat{C}H$, sarà anche $A\widehat{C}D > A\widehat{B}C$.

Teorema 2

In ogni triangolo, la somma di due angoli interni è minore di un angolo piatto.

Dimostrazione

Siano α e β due angoli interni di un triangolo e α' l'angolo esterno adiacente ad α : si ha allora $\beta < \alpha'$ (per il teorema 1), quindi $\alpha + \beta < \alpha + \alpha'$, ma $\alpha + \alpha'$ è un angolo piatto.

Esercizio 10

Un triangolo non può avere due angoli ottusi, o due angoli retti, o un angolo retto ed uno ottuso.

Teorema 3

Se due lati di un triangolo non sono congruenti, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto al lato minore.

In simboli:

$$(\overset{\triangle}{ABC}, AC > CB) \Rightarrow (A\widehat{B}C > B\widehat{A}C).$$

Dimostrazione

Nel triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ (Figura 14), sia $AC > CB$. Sul lato maggiore AC prendiamo un punto D tale che $DC \equiv CB$ e tracciamo BD, riesce $A\widehat{B}C > D\widehat{B}C$. Si ha $D\widehat{B}C \equiv C\widehat{D}B$, mentre $C\widehat{D}B$ come esterno al triangolo $\overset{\triangle}{ADB}$ risulta maggiore (teorema …) di $D\widehat{A}B = B\widehat{A}C$. Dalle relazioni stabilite $D\widehat{B}C \equiv C\widehat{D}B$, $C\widehat{D}B > B\widehat{A}C$, segue $A\widehat{B}C > B\widehat{A}C$.

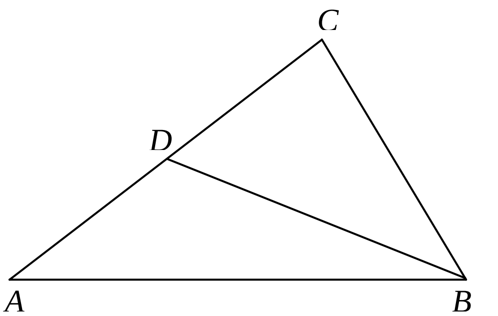


Figura 14 – $(A\widehat{B}C > B\widehat{A}C) \Leftrightarrow (AC > CB)$.

Sussiste anche l'inverso del teorema precedente:

Teorema 4

Se due angoli di un triangolo non sono congruenti, il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore.

In simboli:

$$(\overset{\triangle}{ABC}, A\widehat{B}C > B\widehat{A}C) \Rightarrow (AC > CB).$$

Dimostrazione

Nel triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ sia $A\widehat{B}C > B\widehat{A}C$ (Figura 14). Non può essere $AC \equiv CB$ perché il triangolo sarebbe isoscele e si avrebbe $A\widehat{B}C \equiv B\widehat{A}C$ contro l'ipotesi. Allora, applicando il principio del terzo escluso (*paragrafo 1.7 dell'unità 0*), deve essere $AC \gtrless CB$; non può risultare $AC < CB$ perché, per il teorema precedente, sarebbe $A\widehat{B}C \equiv B\widehat{A}C$ contro l'ipotesi. Dev'essere allora necessariamente $AC > CB$.

Teorema 5

In un triangolo qualsiasi ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Dimostrazione

Nel triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ (Figura 15), sul prolungamento del lato AC dalla parte di C, consideriamo il segmento CD congruente a CB, cosicché si abbia $AD \equiv AC + CB$. Si congiunga B con D e si osservi che, essendo la semiretta CB interna all'angolo $A\widehat{B}D$, risulta $A\widehat{B}C < A\widehat{B}D$. Il triangolo $\overset{\triangle}{CBD}$ è isoscele sulla base BD, sicchè si ha anche $C\widehat{B}D \equiv A\widehat{D}B$. Dalle due relazioni ritrovate segue $A\widehat{D}B < A\widehat{B}D$. Nel triangolo $\overset{\triangle}{ADB}$, tenuto conto di tale disuguaglianza e del teorema…, si ha $AB < AD$ e quindi $AB < AC + BC$.

Per dimostrare la seconda parte del teorema osserviamo quanto segue: se gli altri due lati BC e AC sono congruenti, è senz’altro vero che AB è maggiore della loro differenza (essendo questa nulla!). Se invece BC e AC non sono congruenti, ed è ad esempio $AC > BC$, dalla prima parte del teorema segue $AC < AB + BC$. Sottraendo ad ambo i membri la stessa quantità BC, si ottiene $AB > AC - BC$.

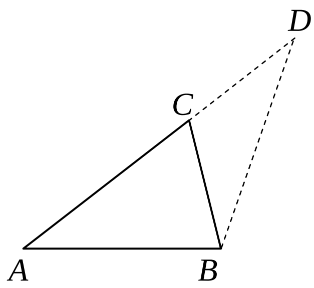


Figura 15 – $AB < AC + BC$, $AB > AC - BC$.

Definizione 11

Un triangolo con un angolo retto si dice **rettangolo**; i lati che comprendono l'angolo retto si dicono **cateti**, mentre il terzo si dice **ipotenusa**.

Esercizio 11

Si dimostri che l'ipotenusa è maggiore dei cateti.

Esercizio 12

Si dimostri che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti:

a) i due cateti;

b) un cateto e l'angolo acuto adiacente;

c) un cateto e l'angolo acuto opposto.

Suggerimento

Si applichino i criteri di congruenza dei triangoli, oltre l'ipotesi.

Definizione 12

In un qualsiasi triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ si dice:

- **bisettrice** relativa ad un vertice (esempio C) il segmento della semiretta bisettrice dell'angolo $A\widehat{C}B$ individuato da C e dalla intersezione della semiretta bisettrice col lato opposto AB;
- **mediana** relativa ad un vertice C il segmento che ha per estremi C e il punto medio del lato opposto AB;
- **altezza** relativa ad un lato AB il segmento che ha per estremi C e l'intersezione con la retta AB della retta per C che forma un angolo retto con la retta AB.

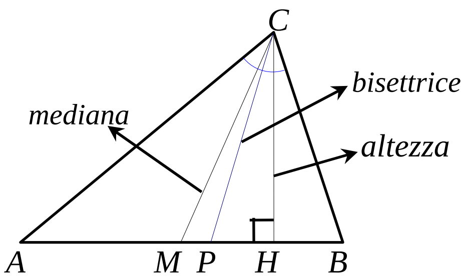


Figura 16 - Bisettrice CP, mediana CM e altezza CH in $\overset{\Delta}{ABC}$.

Esercizio 13

Quante mediane, bisettrici e altezze ci sono in un triangolo? Esse sono sempre interne al triangolo?

Il seguente teorema mostra, in sostanza, che un triangolo isoscele si può decomporre in due triangoli congruenti:

Teorema 6

In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza.

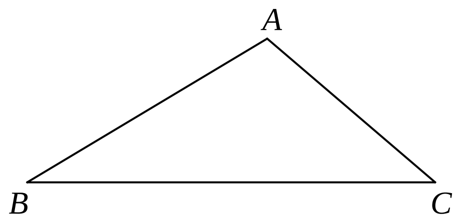
Dimostrazione

Sia $A\overset{\triangle}{B}C$ un triangolo isoscele e *CH* la bisettrice dell'angolo al vertice *C*; per dimostrare che *CH* è la mediana applica il primo criterio di congruenza ai triangoli $\mathbf{A\overset{\triangle}{C}H}$ *e* $\mathbf{B\overset{\triangle}{C}H}$, mentre per provare che *CH* è anche l'altezza applica la definizione di angolo retto.

5. Esercizi supplementari

5.1. Definizioni

1. Quando una figura geometrica è detta triangolo?
2. Cosa si indica con $\mathfrak{T}$?
3. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a. Un triangolo è un sottoinsieme del piano.
   b. Tutti gli angoli consecutivi agli angoli esterni di un triangolo sono detti angoli esterni.
   c. Un triangolo ha tre vertici, tre lati e tre angoli interni.
   d. Esistono triangoli con i tre vertici allineati.
4. Disegnare un triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$ e determinarne:
   a. tutti i lati
   b. tutti gli angoli interni
   c. tutti gli angoli esterni
5. L'angolo $A\widehat{B}C$ del triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$ (figura sottostante) si dice compreso tra i lati *AB* e *BC* e adiacente a ciascuno di essi. Si dice inoltre che sono opposti il lato *AB* e l'angolo $A\widehat{C}B$.



Determinare:

a. I lati tra i quali sono compresi gli angoli $B\widehat{A}C$ e $A\widehat{C}B$;
b. gli angoli adiacenti ai lati *AC* e *BC*;
c. gli angoli opposti rispettivamente ai lati *AC* e *CB*.

6. Nel triangolo $A\overset{\triangle}{B}C$ si ha: $d(A, B) = d(B, C) + d(A, C)$.

Calcolare il rapporto tra il perimetro del triangolo ed il lato *AB*.

Suggerimento.

$$\frac{d(A,B)+d(B,C)+d(A,C)}{d(A,B)}=\frac{d(A,B)+7d(A,B)}{d(A,B)}=\dots$$

7. Mostrare con un disegno che un triangolo può essere considerato come intersezione degli insiemi di punti che costituiscono tre semipiani.

5.2. Classificazione dei triangoli

1. Dire quali delle seguenti relazioni sono vere:

a) $\mathcal{T}_s \cap \mathcal{T}_i = \mathcal{T}_i$
b) $\mathcal{T}_e \cup \mathcal{T}_i = \mathcal{T}_i$
c) $\mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_s = \mathcal{T}$
d) $\mathcal{T}_e \cap \mathcal{T}_s = \varnothing$

2. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:

a) Un triangolo con due angoli acuti è acutangolo.
b) Un triangolo con un angolo retto è rettangolo.
c) Un triangolo con due angoli ottusi è ottusangolo.

3. Disegnare

a) un triangolo che sia contemporaneamente isoscele e rettangolo;
b) un triangolo che sia contemporaneamente isoscele e ottusangolo.

4. Dimostrare che se un triangolo ha tutti gli angoli congruenti allora è equilatero. Dai una dimostrazione diretta e una per assurdo.
5. Dimostrare che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti. Formalizza sia l'enunciato che la dimostrazione con implicazioni.
6. Congiungendo i punti medi dei lati congruenti di un triangolo isoscele si ottiene un altro triangolo isoscele?
7. Sia $A\overset{\Delta}{B}C \in \mathcal{T}_e$ e sia O il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Dimostrare che $O\overset{\Delta}{B}C \in \mathcal{T}_i$.

5.3. Primo criterio di uguaglianza (congruenza)

1. Dimostrare che il triangolo ottenuto congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo equilatero è anch'esso equilatero.
2. Dimostrare che due triangoli sono congruenti se hanno congruenti rispettivamente l'angolo al vertice e uno dei lati.
3. Dimostrare che se si congiungono i punti medi dei lati di un triangolo isoscele si ottiene un altro triangolo isoscele.
4. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo qualunque. Tracciare un segmento AD tale che passi per il punto medio M di BC e sia doppio di AM, dimostrare che $CD + BD \equiv AC + AB$.
5. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato in figura con ipotesi e tesi. Dimostrare la tesi.

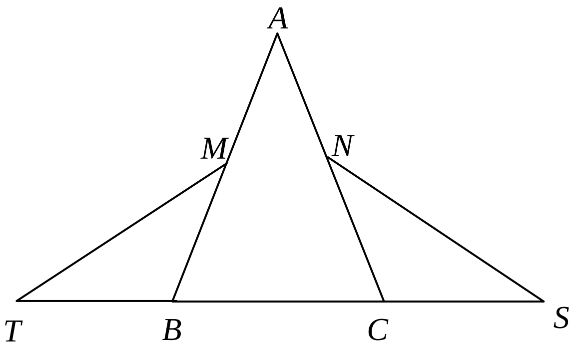
Hp: $AB \equiv AC$

$BT \equiv CS$

$AM \equiv MB$

$AN \equiv NC$

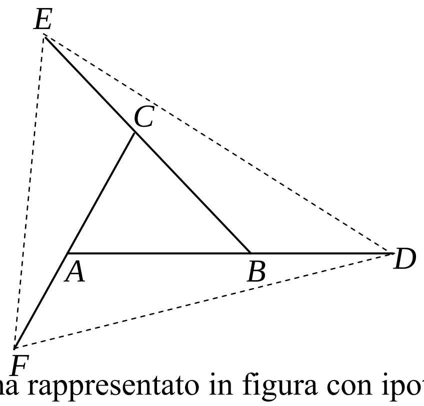
Ts: $\overset{\Delta}{TBM} \equiv \overset{\Delta}{SCN}$



6. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato in figura con ipotesi e tesi. Dimostrare la tesi.

Hp: $AB \equiv BC \equiv AC$
$BD \equiv CE \equiv AF$

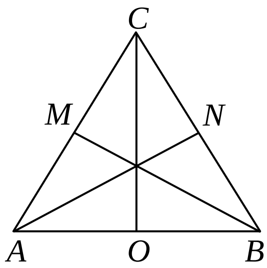
Ts: $EF \equiv FD \equiv DE$
$\overset{\triangle}{ECF} \equiv \overset{\triangle}{FAD} \equiv \overset{\triangle}{BED}$



7. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato in figura con ipotesi e tesi. Dimostrare la tesi.

Hp: $AB \equiv BC \equiv AC$
$CM \equiv AO \equiv BN$

Ts: $CO \equiv AN \equiv BM$



8. Sia $\overset{\triangle}{ABC}$ un triangolo isoscele. Sul prolungamento della base *BC* si prendano due segmenti congruenti *BM* e *CN*. Dimostrare che:

   a. $\overset{\triangle}{ABM}$ è congruente a $\overset{\triangle}{CNA}$;

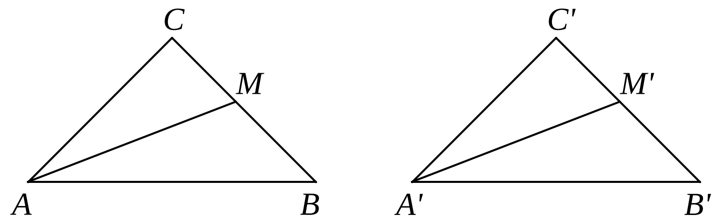
   b. $\overset{\triangle}{AMN}$ è isoscele.

9. Sia *M* il punto medio di un segmento *AB*. Su un segmento passante per *M* si considerino due segmenti *CM* e *DM* congruenti. Dimostrare che $A\hat{M}C \equiv B\hat{M}D$.

10. Sia *M* il punto medio del lato BC del triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$. Si unisca *A* con *M* e si prolunghi *AM* di un segmento $MA' \equiv AM$. Dimostrare che $CA' \equiv AB$ e che $M\hat{A}B \equiv M\hat{A}'C$.

5.4. Secondo criterio di congruenza

1. Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti rispettivamente la base e uno degli angoli ad essa adiacenti.
2. Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti rispettivamente la base e l'angolo al vertice.
3. Siano *D* ed *E* due punti appartenenti rispettivamente ai lati congruenti *AB* e *AC* del triangolo isoscele $A\overset{\Delta}{B}C$. Dimostrare che se $E\hat{B}C \equiv D\hat{B}C$, allora $BE \equiv DC$..
4. Siano $A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ due triangoli congruenti (figura sottostante).



Dimostrare che se $C\hat{A}M \equiv M\hat{A}B$ e $C'\hat{A}'M' \equiv M'\hat{A}'B'$, allora $AM \equiv A'M'$.

5. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo isoscele sia *AH* l'altezza relativa alla sua base *BC*. Si consideri un punto *P* di *AH* e si congiungano *B* con *P* e *C* con *P*. Prolungando i segmenti *BP* e *CP* dalla parte di *P*, essi incontrano i lati *AB* e *AC* rispettivamente in *E* e *F*. Dimostrare che $PE \equiv PF$, $PB \equiv PC$ e $EC \equiv BF$.
6. Si consideri il segmento *AB* e sia *M* il suo punto medio. Da parti opposte di *AB* si conducano le semirette *AX* e *BZ*, formanti con *AB* due angoli congruenti. Si conducano due rette passanti per *M*: una che interseca *AX* in *C* e *BZ* in *D*, l'altra che interseca *AX* in *E* e *BZ* in *F*. Dimostrare che $AC \equiv BD$, $CE \equiv DF$ e $FC \equiv DE$.
7. Sui lati congruenti *AB* e *AC* del triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ si prendano rispettivamente due segmenti congruenti *AM* e *AN*. Dimostrare che:
   a. i due triangoli $\overset{\Delta}{ABN}$ e $\overset{\Delta}{ACM}$ sono congruenti;
   b. gli angoli $B\hat{M}C$ e $C\hat{N}B$ sono congruenti;

c. detto O il punto di intersezione di CM e BN, i triangoli $\overset{\Delta}{BOM}$ e $\overset{\Delta}{CON}$ sono congruenti;

d. il triangolo $\overset{\Delta}{BOC}$ è isoscele.

8. Sul lato di un triangolo di vertice O si prendano i segmenti OA e OB, e sull'altro lato i segmenti $OA' \equiv OA$ e $OB' \equiv OB$. Dimostrare che:

   a. i triangoli $\overset{\Delta}{OAB'}$ e $\overset{\Delta}{OBA'}$ sono congruenti;

   b. i segmenti AB' e $A'B$ si tagliano in parti a due a due congruenti.

9. Sul prolungamento dei lati di un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{AOB}$ si prendano due segmenti congruenti OM e ON e si uniscano i loro estremi con i vertici di base. Dimostrare che si ottengono due triangoli congruenti.

10. Dimostrare che in due triangoli congruenti le bisettrici di due angoli corrispondenti sono congruenti.

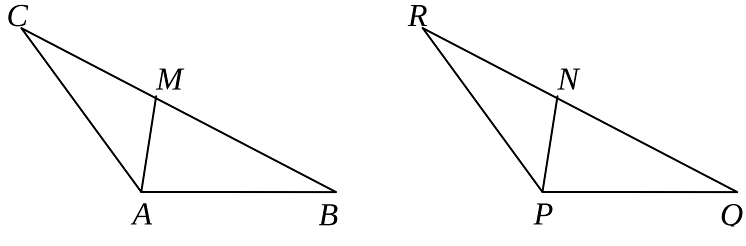
5.5. Terzo criterio di congruenza

1. Dimostrare che due triangoli equilateri sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti un lato.

2. Dimostrare che due triangoli equilateri sono congruenti se hanno lo stesso perimetro.

3. Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti la base e il perimetro.

4. Siano $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{PQR}$ due triangoli con $AB \equiv PQ$, $BC \equiv QR$, $AM \equiv PN$ (figura sottostante) ed M e N siano punti medi rispettivamente dei lati BC e QR. Dimostrare che $A\overset{\Delta}{B}C \equiv P\overset{\Delta}{Q}R$.



5. Dimostrare che se due punti C e D giacciono da parti opposte rispetto ad una retta AB e sono tali che $AC \equiv AD$ e $CB \equiv BD$, allora $A\hat{B}C \equiv A\hat{B}D$.

6. In ognuno dei seguenti casi stabilire se i due triangoli $A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ sono congruenti e in caso affermativo dire il criterio usato:

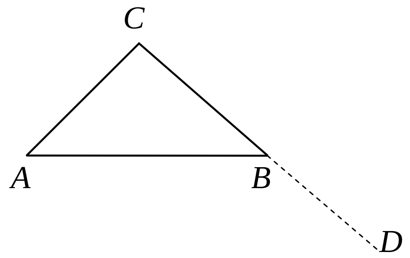
a)	$\hat{A} \equiv \hat{A}'$	$AC \equiv A'C'$	$AB \equiv A'B'$
b)	$\hat{A} \equiv \hat{A}'$	$AC \equiv A'C'$	$BC \equiv B'C'$
c)	$\hat{A} \equiv \hat{A}'$	$\hat{B} \equiv \hat{B}'$	$AB \equiv A'B'$
d)	$AC \equiv A'C'$	$BC \equiv B'C'$	$AB \equiv A'B'$
e)	$\hat{B} \equiv \hat{B}'$	$\hat{C} \equiv \hat{C}'$	$AC \equiv A'C'$

5.6. Relazioni fra gli elementi di un triangolo

1. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri.

Con riferimento alla figura sottostante

a. $A\hat{B}C > A\hat{C}B$
b. Se $CB > AC$ allora $C\hat{A}B < A\hat{B}C$
c. $A\hat{B}C + B\hat{A}C < 180^0$
d. Se $A\hat{C}B > C\hat{B}A$ allora $AB > AC$



2. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri.

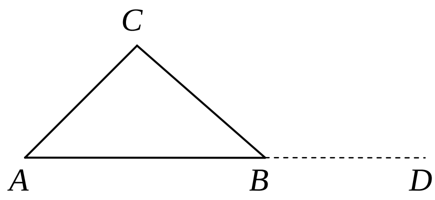
Con riferimento alla figura sottostante

a. $CB > AB - AC$

b. $C\hat{B}D > A\hat{C}B$ e $C\hat{B}D > C\hat{A}B$

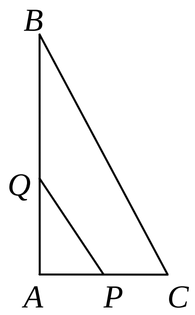
c. $B\hat{A}C + C\hat{B}D < A\hat{B}D$

d. Se $AC \neq AB$ allora $C\hat{B}A > A\hat{C}B$.



3. In un triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ si ha $BC > AC$ e $A\hat{C}B > B\hat{A}C$. Dimostrare che $A\hat{C}B > A\hat{B}C$.

4. Con riferimento alla figura seguente dove $B\hat{A}C \equiv 90^0, BQ \equiv QP$, dimostrare che $AQ < BQ$.



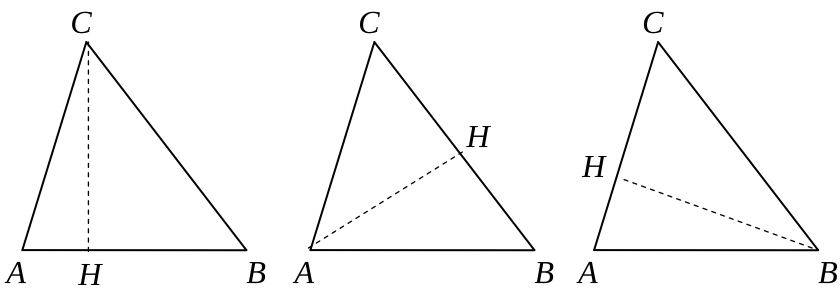
5. Dimostrare che in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è minore dell'ipotenusa.

6. Dimostrare che in un triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore di ciascuno degli altri due lati.

7. Dimostrare che in un triangolo isoscele con base *AB* la bisettrice *AD* è maggiore di *BD*.

8. Sia $A\overset{\Delta}{B}C$ un triangolo isoscele di base *AB*. Dopo aver prolungato *AC* dalla parte di *C* di un segmento *CD*, dimostrare che *AD*>*DB*.

9. Stabilire se è vero il seguente enunciato:



$$CH < \frac{1}{2}(AC + CB) \qquad AH < \frac{1}{2}(AC + AB) \qquad BH < \frac{1}{2}(CB + AB)$$

Generalizzare quanto dimostrato.

10. Sia $A\overset{\Delta}{B}C \in \mathscr{T}_i$. Il segmento *CD* che unisce il vertice con un punto della base è minore di ciascuno dei lati congruenti?

    Suggerimento. $B\hat{D}C > \hat{A}$.

11. Sia $A\overset{\Delta}{B}C \in \mathscr{T}_i$. Il segmento *CD* che unisce il vertice con un punto del prolungamento della base è maggiore di ciascuno dei lati congruenti?

12. Sia $A\overset{\Delta}{B}C \in \mathscr{T}$, con *AB* < *AC*, sia *M* il punto medio di *BC*. Dimostrare che $A\hat{N}C > C\hat{A}N$.

13. Nel triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ sia *P* un punto del lato *AB*. Dimostrare che CP è minore del semiperimetro del triangolo.

14. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:

    a. In un triangolo ciascun lato è minore del semiperimetro
    b. In un triangolo ciascun lato è maggiore della differenza tra gli altri due
    c. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore della somma dei due cateti.

15. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:

    a. Esistono triangoli in cui le altezze sono anche mediane e bisettrici.
    b. Solo alcuni triangoli hanno tre altezze, tre mediane e tre bisettrici.
    c. Le tre mediane e le tre bisettrici di un triangolo sono sempre interne ad esso. Un'altezza può essere esterna al triangolo o coincidere con un suo lato.

16. Dimostrare che se $\overset{\Delta}{ABC} \in \mathscr{T}_i$, allora la mediana relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice.

17. Dimostrare che se $\overset{\Delta}{ABC} \equiv \overset{\Delta}{A'B'C'}$, allora le mediane relative a due lati corrispondenti qualsiasi sono congruenti.

18. Dimostrare che in un triangolo una mediana è minore della semisomma dei due lati che partono dallo stesso vertice della mediana.

    Suggerimento. Prolungare la mediana di un segmento ad essa congruente.

19. Dimostrare che in un triangolo una mediana è maggiore della semidifferenza dei lati che partono dallo stesso vertice della mediana.

20. Dimostrare che in due triangoli congruenti le bisettrici di due angoli corrispondenti sono congruenti.

21. Due triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{A'BC}$ sono situati da parte opposta rispetto al lato comune BC e tale lato è bisettrice degli angoli $A\hat{B}A'$ e $A\hat{C}A'$. Dimostrare che:

    a. $AB \equiv BA'$ $AC \equiv A'C$
    b. se M è un punto qualunque di BC si ha $AM \equiv A'M$. Qual è la bisettrice dell'angolo $A\hat{M}A'$?

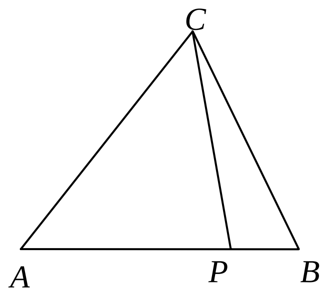
22. Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti un angolo alla base e la bisettrice di questo angolo.

23. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo equilatero. Sia O il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Dimostrare che $\overset{\Delta}{OBC}$ è isoscele.

24. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato in figura con ipotesi e tesi. Dimostrare la tesi.

$Hp: AC \equiv CB$

$Ts: CP < CB$



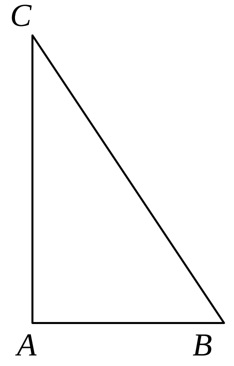
25. Sia P un punto interno ad un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$. Si uniscano i vertici con P e si dimostri che $PA + PB + PC$ è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro del triangolo.

26. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato in figura con ipotesi e tesi. Dimostrare la tesi.

$Hp: \hat{A} \equiv 90°$

$\hat{B} \equiv \hat{C}$

$Ts: AC \equiv 2AB$



Suggerimento

Si costruisca un triangolo congruente ad $\overset{\Delta}{ABC}$ da parte opposta ad AC.

27. Dimostrare che un triangolo in cui coincidono altezza relativa alla base e bisettrice dell'angolo opposto alla base è isoscele.

28. Dimostrare che due triangoli che hanno congruenti le basi e gli angoli al vertice sono congruenti.

29. Dimostrare che se per i vertici di un triangolo equilatero si conducono le altezze relative ai lati esse si incontrano a due a due formando, sugli stessi lati, dei triangoli isosceli congruenti.

30. Ripetere la costruzione dell'esercizio precedente nel caso di un triangolo isoscele. Si ottengono ancora tre triangoli isosceli? Quanti di questi sono congruenti fra loro?

31. Dimostrare che due triangoli sono congruenti se hanno congruenti:

   a. due angoli e l'altezza relativa al lato comune a tali angoli;
   b. due lati e l'altezza relativa ad uno di essi;
   c. due lati e l'altezza relativa al terzo lato.

32. Siano dati due triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ con $BC \equiv B'C'$ e le mediane e le altezze relative ai lati BC e $B'C'$ anch'esse congruenti. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti.

33. Preso sulla bisettrice di un angolo $X\hat{O}Y$ un punto P qualunque, dimostrare che esso ha uguale distanza dai due lati OX e OY.

34. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato in figura con ipotesi e tesi. Dimostrare la tesi.

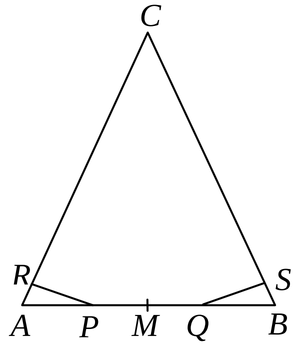
$Hp: AC \equiv BC$

$AM \equiv MB$

$PM \equiv MQ$

$A\hat{R}P \equiv Q\hat{S}B \equiv 90°$

$Ts: PR \equiv QS$



35. Dimostrare che un triangolo in cui coincidono la bisettrice dell'angolo opposto alla base e la mediana della base è isoscele.

36. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo equilatero e CH una sua altezza. Si considerino le bisettrici degli angoli che AB forma con CH e si uniscano i punti di intersezione di tali bisettrici con i lati AC e CB. Dimostrare che si ottiene un triangolo rettangolo isoscele.

37. Dimostrare che due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e la mediana relativa ad uno di essi.

38. Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti un angolo alla base e la sua bisettrice.

39. Si considerino due triangoli rettangoli congruenti. Dimostrare che le altezze relative ai lati congruenti sono congruenti.

40. Dimostrare che in un triangolo la somma delle tre altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro. Lo stesso vale per la somma delle tre mediane.

6. Rette perpendicolari

Esercizio 14

È vero che la bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è perpendicolare alla base e la divide in due parti congruenti? In quale esercizio è stato sostanzialmente già dimostrato?

Esercizio 15

La perpendicolare alla base di un triangolo isoscele condotta per il vertice divide l'angolo al vertice e la base in due parti congruenti.

Definizione 13

Si chiama ***asse*** di un segmento la perpendicolare nel suo punto medio.

Esercizio 16

Dimostrare che l'insieme dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento coincide con l'asse del segmento stesso.

7. Conseguenze della perpendicolarità e del parallelismo

Esercizio 17

È vero che in un triangolo un angolo è supplementare della somma degli altri due?

Esercizio 18

Dimostra che in un triangolo ogni angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti.

Suggerimento

In riferimento alla figura 13, l'angolo esterno $C\hat{B}D$ è supplementare dell'angolo $A\hat{B}C$, è anche supplementare della somma $D\hat{A}C + A\hat{C}B$, allora ....

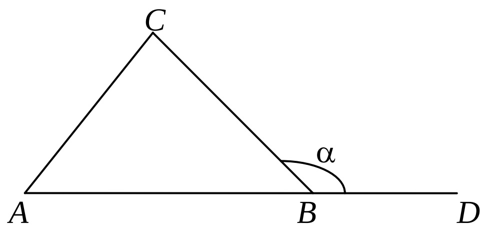


Figura 17 - Triangolo ABC, con angolo esterno α.

Esercizio 19

Dedurre dall'esercizio 17 il teorema 1 dell'unità 2.

Esercizio 20

Dimostra che due triangoli aventi ordinatamente congruenti un lato, un angolo ad esso adiacente, e l'angolo opposto sono congruenti.

Suggerimento

Applica il teorema 5 e il 2° criterio di congruenza dei triangoli.

Esercizio 21

Dimostra che la misura della perpendicolare condotta da un punto ad una retta è minore della misura di ogni obliqua condotta dallo stesso punto alla retta. In simboli:

$$d(P,H) < d(P,A), \forall A \in r.$$

Suggerimento

Considera il triangolo $\overset{\Delta}{PAH}$: esso è ... in ... PA è ... di questo triangolo. Applica il teorema 4, paragrafo 1.7 dell'unità 2 e concludi.

Esercizio 22

Dimostra che due oblique condotte dallo stesso punto ad una retta aventi proiezioni congruenti sono congruenti.

Suggerimento

Siano *PA* e *PB* due oblique condotte da *P* a *r* (fig. 16). Se $HB \equiv HA$, i piedi *A* e *B* sono manifestamente da parti opposte rispetto ad *H*. Considera i due triangoli $\overset{\Delta}{AHP}$ e $\overset{\Delta}{BHP}$... .

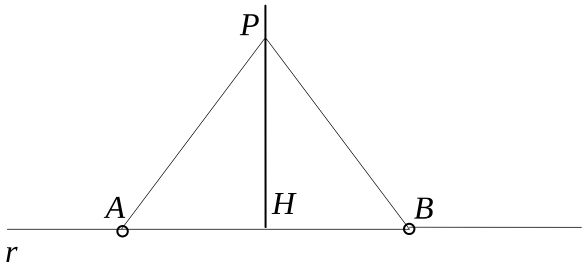


Figura 18 - Oblique PA e PB.

Esercizio 23

Qual è la minima distanza di un punto *P* non appartenente ad una retta *r* dai punti di essa?

Suggerimento

Applica Esercizio 21.

8. Trapezi e parallelogrammi

Esercizio 24

Stabilisci la relazione di inclusione tra l'insieme dei parallelogrammi e quello dei trapezi.

Esercizio 25

Dimostra che in un parallelogramma ogni angolo è supplementare di ciascuno degli altri due che hanno in comune con esso un lato.

I parallelogrammi hanno particolare importanza, poiché vale la seguente caratterizzazione:

Teorema 7

Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se:

a. gli angoli opposti sono congruenti;
b. i lati opposti sono congruenti;
c. le diagonali si dividono scambievolmente a metà.

Prova a dimostrare ciascuna di queste proprietà svolgendo i seguenti esercizi guidati:

Esercizio 26

Dimostra che un quadrilatero (Figura 19) è un parallelogramma se e solo se gli angoli opposti sono congruenti.

Suggerimento

Dividiamo la dimostrazione in due parti.

a. Un quadrilatero è un parallelogramma se gli angoli opposti sono congruenti. ➲ Sia *ABCD* un quadrilatero con $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{D} \equiv \hat{B}$; allora $\hat{A} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{B} \equiv 2\left(\hat{A} + \hat{B}\right)$. Ma la somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a ... (teorema 6), quindi $\hat{A} + \hat{B}$ è congruente ad un angolo ..., ossia $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono .... D'altra parte, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono ... rispetto alle rette .... Allora le rette *AD* e *BC* sono ....
b. In un parallelogramma gli angoli opposti sono congruenti. ➲ Sia *ABCD* un parallelogramma: gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono supplementari poiché .... Analogamente gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono .... Allora $\hat{A} \equiv \hat{C}$ poiché .... Concludi.

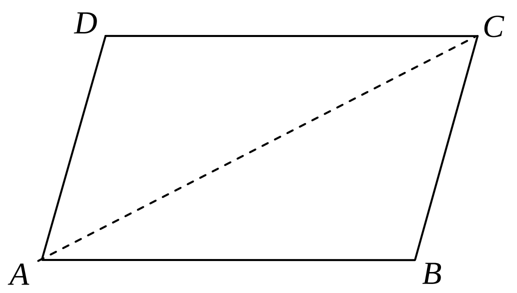


Figura 19 - Quadrilatero - parallelogramma ABCD.

Esercizio 27

Dimostra che un quadrilatero (fig. 20) è un parallelogramma se e solo se i lati opposti sono congruenti.

Suggerimento

Dividiamo la dimostrazione in due parti.

a. Un quadrilatero con i lati opposti congruenti è un parallelogramma. ➲ Sia $ABCD$ un quadrilatero con $AB \equiv DC$ e $BC \equiv AD$; considera la diagonale AC ed esamina i triangoli $\overset{\Delta}{ACD}$ e $\overset{\Delta}{ABC}$: essi sono ... per avere .... Risulta, in particolare, $C\hat{A}B = \dots$. Applica il teorema 2 e concludi.
b. In un parallelogramma i lati opposti sono congruenti. ➲ Sia $ABCD$ un parallelogramma: considera la diagonale AC ed esamina i triangoli $\overset{\Delta}{ACD}$ e $\overset{\Delta}{ABC}$: essi sono ... per avere .... Concludi.

Esercizio 28

Dimostra che un quadrilatero (Figura 20) è un parallelogramma se e solo se le diagonali si dividono scambievolmente a metà.

Suggerimento

Dividiamo la dimostrazione in due parti.

a. Un quadrilatero con le diagonali che si dividono scambievolmente a metà è un parallelogramma. ➲ Sia $ABCD$ un quadrilatero in cui le diagonali AC e BD si incontrano nel punto O tale che $AO \equiv OC$ e $DO \equiv OB$; esamina i triangoli $\overset{\Delta}{ABO}$ e $\overset{\Delta}{DOC}$: essi sono ... per avere .... Concludi.
b. In un parallelogramma le diagonali si dividono scambievolmente a metà. ➲ Sia $ABCD$ un parallelogramma in cui le diagonali AC e BD si incontrano nel punto O; esamina i triangoli $\overset{\Delta}{ABO}$ e $\overset{\Delta}{DOC}$: essi sono ... per avere .... Concludi.

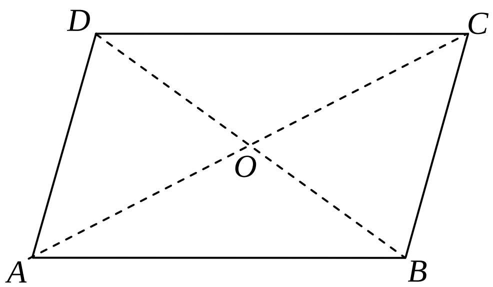


Figura 20 - AC e BD diagonali di ABCD.

9. Rettangoli, rombi e quadrati

Esaminiamo ora alcuni parallelogrammi particolari.

Esercizio 29

Dimostra che in un parallelogramma se un angolo è retto lo sono anche gli altri tre.

Questo esercizio giustifica la:

Definizione 14

Un parallelogramma con gli angoli retti si chiama ***rettangolo***.

I rettangoli sono caratterizzati dal seguente

Teorema 8

Un parallelogramma è un rettangolo se e solo se le sue diagonali sono congruenti (Figura 21).

Dimostrazione

Dividiamo la dimostrazione in due parti.

a. Un parallelogramma con le diagonali congruenti è un rettangolo. ➲ Sia *ABCD* un parallelogramma con le diagonali *AC* e *BD* congruenti; esamina i triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{ADB}$: essi sono ... per avere .... In particolare, $A\hat{B}C \equiv \dots$; tali angoli sono inoltre consecutivi, per cui, applicando Esercizio 25, sono entrambi ....

b. In un rettangolo le diagonali sono congruenti. ➲ Sia *ABCD* un rettangolo con diagonali *AC* e *BD*; esamina i triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{ADB}$: essi sono ... per avere .... Concludi.

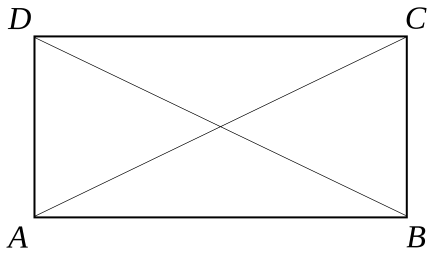


Figura 21 - Rettangolo.

Esercizio 30

Se in un parallelogramma due lati consecutivi sono congruenti, sono congruenti ad essi anche gli altri due lati?

Definizione 15

Ogni parallelogramma avente i quattro lati congruenti si dice ***rombo*** (o *losanga*).

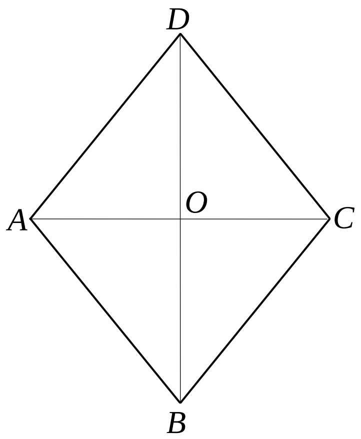


Figura 22 – Rombo.

I rombi sono caratterizzati dal seguente

Teorema 9

Un parallelogramma è un rombo se e solo se:

a. le diagonali sono perpendicolari;
b. le diagonali sono bisettrici degli angoli (fig. 22).

Dimostrazione

Dividiamo la dimostrazione in 4 parti.

1 a. Un parallelogramma con le diagonali perpendicolari è un rombo. ➲ Sia *ABCD* un parallelogramma con le diagonali *AC* e *BD* perpendicolari; esamina i triangoli $\overset{\Delta}{AOB}$ e $\overset{\Delta}{AOD}$: essi sono ... per avere .... In particolare, $AB \equiv \ldots$.

b. In un rombo le diagonali sono perpendicolari. ➲ Sia *ABCD* un rombo con le diagonali *AC* e *BD* che si incontrano nel punto *O*; esamina i triangoli $\overset{\Delta}{AOB}$ e $\overset{\Delta}{AOD}$: essi sono ... per avere .... In particolare, $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}D$; ma essi sono ... e quindi sono entrambi ....

2 a. Un parallelogramma con le diagonali bisettrici degli angoli è un rombo. ➲ Sia *ABCD* un parallelogramma con le diagonali *AC* e *BD* bisettrici degli angoli; in particolare,

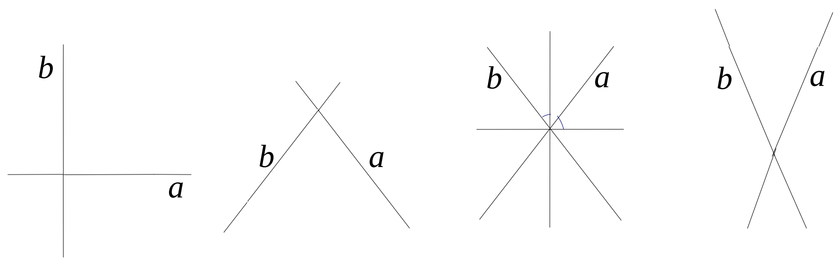
$D\hat{A}C \equiv B\hat{A}C$. Considera le parallele *AD* e *BC* tagliate dalla trasversale *AC*: allora $B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$ poiché .... Segue quindi che $D\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$ e ciò implica che il triangolo $\overset{\Delta}{ADC}$ è ... e quindi $AD \equiv \dots$. Concludi.

b. In un rombo le diagonali sono bisettrici degli angoli. ➲ Sia *ABCD* un rombo con le diagonali *AC* e *BD* che si incontrano nel punto *O*; esamina i triangoli $\overset{\Delta}{AOB}$ e $\overset{\Delta}{AOD}$: essi sono ... per avere .... In particolare, $D\hat{A}O \equiv B\hat{A}O$, cioè la diagonale *AC* divide a metà l'angolo $\hat{A}$. Allo stesso modo si procede con l'altra diagonale.

10. Esercizi supplementari

- **Rette perpendicolari**

1. La nozione di perpendicolarità induce in $\mathcal{R}ett$ una relazione? Enunciare eventuali proprietà.
2. Disegnati una retta e due punti, uno sulla retta e uno fuori di essa, condurre per questi punti le perpendicolari alla retta. Quante ne esistono di tali perpendicolari?
3. Dire se le rette *a* e *b* in ciascuna delle seguenti figure sono perpendicolari.



4. Date due rette perpendicolari, dire se l'insieme intersezione delle due rette è vuoto.
5. Se si scelgono due punti su due rette che si intersecano e per essi si conducono le perpendicolari, queste si intersecano. Perchè?

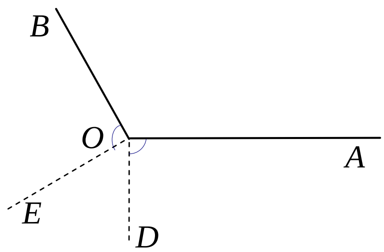
6. Siano r ed s due rette che incontrandosi nel punto P formano quattro angoli retti. Dire, giustificando la risposta, quali dei seguenti enunciati sono veri:

   a. $r \perp s$
   b. $P \in r; P \notin s$
   c. $P \in r; P \in s$
   d. $P \in r \cap s$
   e. $P \notin r; P \in s$
   f. $P \notin r; P \notin s$
   g. $P \notin r \cap s$
   h. $P \in r \cup s$

7. Dire, giustificando la risposta, quali dei seguenti enunciati sono veri:

   a. Se due rette, intersecandosi, formano un angolo retto, allora sono perpendicolari.
   b. Per un punto si possono condurre una o due rette perpendicolari ad una retta data.
   c. Si può dimostrare l'esistenza e l'unicità della perpendicolare, passante per un punto del piano, ad una retta.
   d. La bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele forma con la base un angolo acuto.
   e. L'asse del segmento AB è una qualsiasi retta perpendicolare al segmento.
   f. Ciascun punto dell'asse di un segmento è equidistante dagli estremi di un segmento.

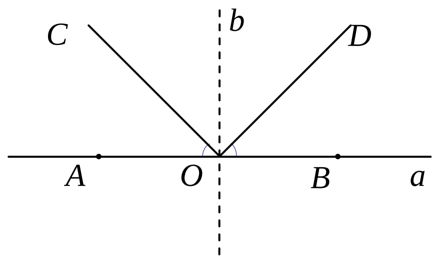
8. Se per il vertice di un angolo convesso $A\hat{O}B$ si conducono le due semirette OD e OE perpendicolari ai lati, nel semipiano opposto a quello che contiene l'altro lato (figura sottostante), l'angolo $E\hat{O}D$ è supplementare a quello dato?



9. Due angoli col vertice in comune e con i lati rispettivamente perpendicolari sono congruenti o supplementari?

10. Sulla bisettrice di un angolo $A\hat{C}B$ si consideri un punto *P*. Dimostrare che la corda condotta per *P*, perpendicolare alla bisettrice, ha *P* come punto medio.

11. Con riferimento alla figura sottostante dimostrare che se $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}D$ e *b* è bisettrice di $C\hat{O}D$, allora *b* ed *a* sono perpendicolari.



12. Si conduca la perpendicolare alla bisettrice di un angolo di vertice *O* che incontra in *A* e in *B* i due lati dell'angolo. Dimostrare che il triangolo $A\overset{\Delta}{O}B \in \mathcal{T}_i$.

13. Dal vertice *A* del triangolo isoscele (acutangolo) $A\overset{\Delta}{B}C$ si conduca la perpendicolare al lato *AB* che incontra il prolungamento della base *BC* nel punto *D*. Dal punto *C* si conduca la perpendicolare ad *AC* che incontra *AD* in *E*. Dimostrare che $C\overset{\Delta}{D}E \in \mathcal{T}_i$.

14. Si consideri un angolo di vertice *O*. Sui suoi lati si prendano due segmenti congruenti *OA* e *OB* e si conducano da *A* e da *B* le perpendicolari ai lati stessi, che si incontrano nel punto *P*. Dimostrare che *OP* è la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$.

15. Per il vertice *A* dell'angolo retto di un triangolo rettangolo isoscele $A\hat{B}C$ si conduca una retta *r* che non tagli il triangolo e dai vertici *B* e *C* si conducano le perpendicolari ad *r*, *BD* e *CE*. Dimostrare che:
    a. $C\hat{A}E \equiv A\hat{B}D$ e $A\hat{C}E \equiv D\hat{A}B$;
    b. i triangoli $A\overset{\Delta}{C}E$ e $A\overset{\Delta}{D}B$ sono congruenti.

16. Sia $A\overset{\Delta}{B}C$ un triangolo isoscele di base *AB*. Si considerino due punti *M* ed *N* sui lati congruenti, equidistanti dal vertice e si conducano da essi le perpendicolari alla base che incontrano tale

base rispettivamente in E ed F. Dimostrare che $AE \equiv FB$ e che il triangolo $C\overset{\Delta}{E}F$ è isoscele.

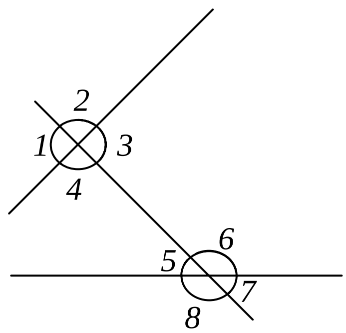
17. Sia $A\overset{\Delta}{B}C$ un triangolo isoscele con $AB \equiv AC$. Per un punto qualunque P della base BC si conduca la perpendicolare alla base che tagli i lati congruenti nei punti D ed E. Dimostrare che il triangolo $A\overset{\Delta}{D}E$ è isoscele.

- **Rette parallele**

1. Date due rette parallele, dire se l'insieme intersezione dei punti delle due rette è vuoto.
2. Disegnare due rette parallele e dire in quali e quante parti rimane diviso il piano.
3. Scrivere in forma simbolica i seguenti enunciati:
   a. Due rette che non hanno punti in comune sono parallele.
   b. Due rette che si intersecano non sono parallele.
   c. Due rette possono essere tra loro parallele o incidenti.

- **Condizioni di parallelismo**

1. Con riferimento alla figura sottostante completare le seguenti frasi:
   a. Gli angoli 3,6 e 4,5 sono...
   b. Gli angoli 1,8 e 2,7 sono...
   c. Gli angoli 3,5 e 4,6 sono...
   d. Gli angoli 1,7 e 2,8 sono...



2. Dimostrare che due rette perpendicolari ad una terza sono parallele.

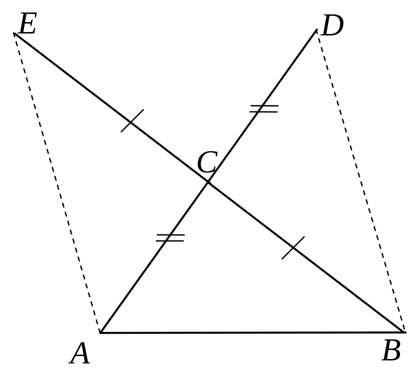
Suggerimento

Siano a e b rette perpendicolari ad una terza retta c. I due angoli alterni interni sono congruenti perchè...

3. Dimostrare che le bisettrici di due angoli corrispondenti formati da due rette parallele tagliate da una trasversale sono parallele.
4. Dimostrare che le bisettrici di due angoli alterni interni o alterni esterni formati da due rette parallele e da una loro trasversale sono parallele.
5. Dimostrare che in un triangolo isoscele la bisettrice di un angolo adiacente all'angolo al vertice è parallela alla base.

   Suggerimento
   Condurre la bisettrice dell'angolo al vertice.
6. In un triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ si prolunghi la mediana AM di un segmento $MD \equiv AM$. Dimostrare che BD è parallelo ad AC.
7. Si prolunghino i lati AB e AC di un triangolo scaleno dalla parte di A e siano AM e AN i due segmenti congruenti rispettivamente ad AB e AC. Si unisca M con N e si dimostri che il segmento MN è parallelo e congruente al segmento BC.
8. Dimostrare che la bisettrice di un angolo adiacente alla base di un triangolo isoscele non è parallela in generale al lato del triangolo.
9. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

$$Hp:\quad CE \equiv BC \qquad Ts:\quad EA // DB$$
$$CD \equiv CA$$



Dimostrare la tesi.

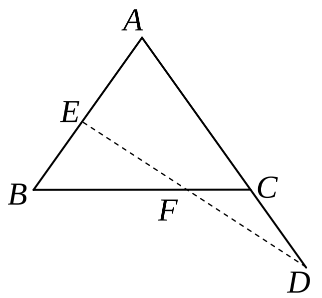
10. Sia dato un angolo acuto di vertice O. Da un punto K di un lato si conduca la perpendicolare al lato stesso e si indichi con M il punto di intersezione con l'altro lato. Si prolunghi OK di un segmento $KB \equiv OK$ ed MK di un segmento $KN \equiv MK$. Dimostrare che:

   a. MB è parallelo ad ON;
   b. OM è parallelo ad NB;
   c. i triangoli $B\overset{\Delta}{O}N$ e $B\overset{\Delta}{O}M$ sono isosceli;
   d. le bisettrici degli angoli in K sono fra loro perpendicolari.

11. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

   Hp: $AB \equiv AC$
   $CD \equiv BE$

   Ts: $EF \equiv FD$



   Dimostrare la tesi.

   Suggerimento
   Tracciare dal punto E la parallela ad AC.

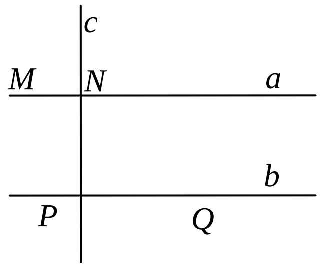
- **Parallela per un punto ad una retta data**

1. Data una retta, quante rette parallele ad essa esistono?

2. Scrivere in forma simbolica i seguenti enunciati:
   a. Due rette parallele tra loro non possono essere incidenti.
   b. Se due rette a e b si intersecano e a' e b' sono altre due rette ad esse rispettivamente parallele, allora anche a' e b' si intersecano.
   c. Nel piano se due rette sono parallele ogni retta che sia parallela ad una di esse è parallela anche all'altra.

- **Condizioni inverse di parallelismo**

1. Dimostrare che se due rette sono parallele ogni perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra.



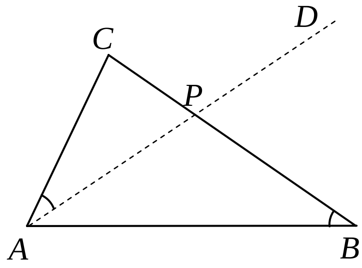
Suggerimento

a. se a e b sono due rette parallele allora la retta c perpendicolare ad a incontra anche b perchè...
b. $M\hat{N}P \equiv N\hat{P}Q$ perchè...
c. Si ha la tesi

2. In un triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ sia *BP* la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$. Da *P* si tracci la parallela alla retta *CB* e sia *Q* la sua intersezione con il lato *AB*. Dimostrare che $P\overset{\Delta}{Q}B$ è un triangolo isoscele.
3. Se dal punto medio di un lato di un triangolo qualunque si conducono le parallele ai rimanenti lati si ottengono due triangoli congruenti?
4. Dimostrare che una retta parallela alla base di un triangolo isoscele che interseca gli altri due lati forma con essi un nuovo triangolo isoscele.
5. Nel triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ si conduca la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$. La parallela per *C* a tale bisettrice interseca la retta *AB* in un punto *D*. Dimostrare che $A\overset{\Delta}{C}D \in \mathcal{T}_i$.
6. Dimostrare che se da un punto del piano si fanno uscire due semirette e da un altro punto altre due semirette parallelamente concordi a queste, si ottiene un angolo congruente a quello formato dalle prime due.
7. Dato un triangolo isoscele $A\overset{\Delta}{B}C$ si traccino le bisettrici degli angoli e sia *O* il loro punto di intersezione. Da esso si conduca una

parallela alla base AB e siano M ed N i punti di intersezione rispettivamente con i lati AC e BC. Dimostrare che i triangoli $A\overset{\Delta}{O}M$ e $B\overset{\Delta}{O}N$ sono isosceli e congruenti e che MN è congruente alla somma di AM e BN.

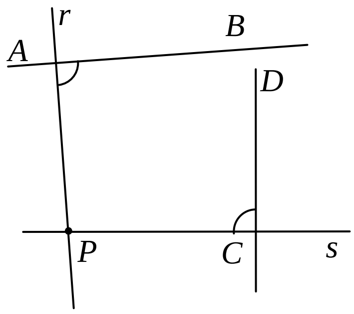
8. Nel triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ sia P un punto del lato BC tale che $A\hat{B}P \equiv C\hat{A}P$. Dimostrare che $A\hat{P}C \equiv C\hat{A}B$.



Suggerimento

Tracciare dal punto P la parallela alla base AB.

9. Dimostrare che le perpendicolari a due rette incidenti sono anch'esse incidenti.

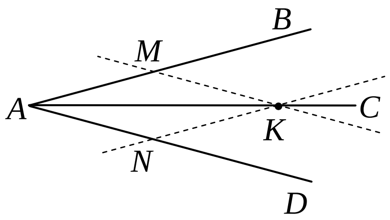


Suggerimento

a. Siano r ed s due rette incidenti in P (figura sopra) e AB e CD due rette ad esse perpendicolari rispettivamente in A e in C.
b. Congiungendo A con C i due angoli $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ sono acuti perchè...
c. Le rette AB e CD, tagliate dalla trasversale AC, formano due angoli coniugati interni $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ che non sono supplementari.
d. Si ha la tesi.

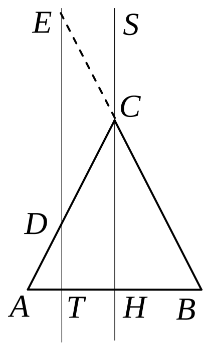
10. Dimostrare che la parallela alla base di un triangolo isoscele condotta per il vertice è bisettrice dell'angolo esterno adiacente all'angolo al vertice.
11. Dimostrare che le parallele ai lati condotte per i vertici di un triangolo equilatero formano ancora un triangolo equilatero.
12. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

$$Hp: \quad B\hat{A}C \equiv C\hat{A}D \qquad KN \,//\, AB \qquad KM \,//\, AD \qquad\qquad Ts: \quad A\hat{M}K \equiv A\hat{N}K$$



Dimostrare la tesi.

13. Dimostrare che in un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ una retta perpendicolare alla base AB incontra le rette AC e BC in due punti equidistanti dal vertice.



Suggerimento

a. condurre l'altezza relativa alla base AB del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ (figura sopra).
b. ET//CH perchè...
c. $E\hat{D}C \equiv D\hat{C}H$ perchè...

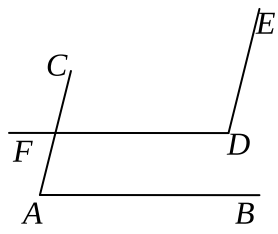
14. Dimostrare che due angoli che hanno i lati rispettivamente paralleli sono congruenti.

Suggerimento

Prolungare un lato di un angolo.

15. Stabilire se la seguente affermazione è vera:

$$AC\,//\,ED,\quad FD\,//\,AB \quad\Rightarrow\quad C\hat{A}B \equiv E\hat{D}F$$



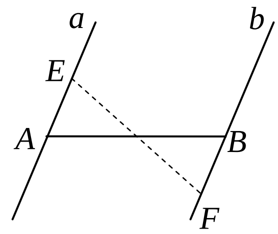
16. Dimostrare che le rette condotte dai vertici di un triangolo, parallelamente ai lati opposti, individuano un triangolo quadruplo del triangolo originario.

Suggerimento

Applicare il secondo criterio di congruenza dei triangoli.

17. Disegnare l'angolo $a\hat{b}$ di vertice O. Condurre dal punto $A \in a$ la parallela al lato b e su di essa si consideri, internamente all'angolo, il punto B tale che $AB \equiv OA$. Dimostrare che OB è bisettrice dell'angolo assegnato.

18. Con riferimento alla figura sottostante, dove $a//b$, $AE \equiv BF$ dimostrare che EF interseca il segmento AB nel suo punto medio.



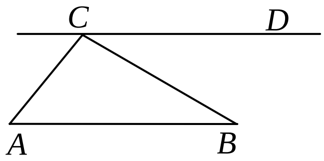
19. Dimostrare che le bisettrici di due angoli coniugati interni, rispetto a due rette parallele, sono perpendicolari fra loro.

Suggerimento

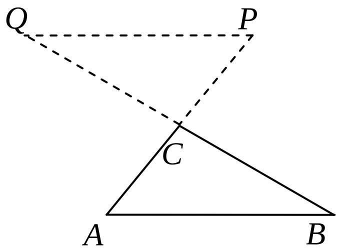
In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza.

20. Con riferimento alle figure seguenti, stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:

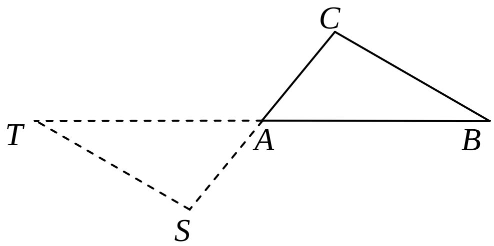
a. $\left(\overset{\Delta}{ABC} \in \mathcal{T},\ \ CD // AB\right) \ \Rightarrow \ A\hat{B}C \equiv B\hat{C}D$



b. $\left(\overset{\Delta}{ABC} \in \mathcal{T},\ \ CP \equiv AC,\ \ CQ \equiv CB\right) \ \Rightarrow \ QP // AB$



c. $\left(\overset{\Delta}{ABC} \in \mathcal{T},\ \ AS \equiv AC \quad ST \equiv CB\right) \ \Rightarrow \ A\hat{B}C \equiv A\hat{S}T$



21. Se in un triangolo equilatero si sceglie un punto interno e per esso si conducono le parallele ai lati fino ad incontrarli, quanti triangoli equilateri si formano?
22. Nelle stesse ipotesi dell'esercizio precedente, dove metteremo il punto perchè i triangoli oltre ad essere equilateri siano congruenti?
23. Ripetere la stessa costruzione degli esercizi precedenti nel caso di un triangolo isoscele e dire se avviene la stessa cosa.

- **Proprietà angolari dei poligoni**

1. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
    a. In un triangolo almeno due angoli sono acuti.
    b. Due triangoli che hanno due angoli rispettivamente congruenti possono avere non congruente il terzo angolo.
    c. Ciascun angolo di un triangolo equilatero è congruente alla terza parte di un angolo congruente.
2. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
    a. In un triangolo rettangolo due angoli sono acuti.
    b. In un triangolo se un angolo è acuto il suo angolo adiacente è ottuso.
    c. In un triangolo un angolo è complementare alla somma degli altri due.
    d. Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari.
3. In un triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ equilatero si prolunghi la base *AB* di un segmento *BD* congruente ad *AB*. Dimostrare che $A\overset{\Delta}{C}D$ è un triangolo rettangolo.
4. In un triangolo rettangolo un angolo acuto è doppio dell'altro. Calcolare l'ampiezza di ciascun angolo.

    Suggerimento
    Indicare con α e 2α l'ampiezza degli angoli acuti.
5. In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è la metà di uno degli angoli alla base. Calcolare l'ampiezza di ciascun angolo.
6. Se due triangoli rettangoli hanno congruenti un angolo acuto, hanno congruente anche l'altro angolo acuto?
7. Calcolare l'ampiezza degli angoli del triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ in ciascuno dei seguenti casi:
    a. $\hat{B} = 2\hat{A} \quad \hat{C} = 3\hat{A}$
    b. $\hat{A} = 3\hat{B} \quad \hat{C} = 60^0$
    c. $\angle\hat{A} + \angle\hat{B} = 90^0 \quad \angle\hat{C} - \angle\hat{A} = 30^0$
    d. $\angle\hat{A} - \angle\hat{B} = 50^0 \quad \angle\hat{A} - \angle\hat{C} = 70^0$
8. Dimostrare che la somma degli angoli sotto la base di un triangolo isoscele supera di due retti l'angolo al vertice.

9. Dimostrare che in ogni triangolo la somma dei complementari di due angoli acuti è congruente all'angolo rimanente.

10. Dato il triangolo rettangolo isoscele $A\overset{\Delta}{B}C$, per un punto *P* dell'ipotenusa *AB* si conduca la perpendicolare ad *AB* e siano *D* ed *E* i punti di intersezione rispettivamente con le rette *AC* e *BC*. Dimostrare che $A\overset{\Delta}{P}D$ e $C\overset{\Delta}{D}E$ sono due triangoli rettangoli isosceli.

11. Sia $A\overset{\Delta}{B}C$ un triangolo isoscele. Dimostrare che $A\overset{\Delta}{B}C$ è anche equilatero se il suo angolo al vertice è la terza parte di un angolo piatto.

12. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
    a. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti.
    b. L'angolo esterno di uno degli angoli alla base di un triangolo isoscele è ottuso.
    c. L'angolo al vertice di un triangolo isoscele è sempre ottuso.

13. Dimostrare che in un triangolo isoscele la differenza tra uno degli angoli esterni adiacenti alla base e metà dell'angolo al vertice, è un angolo retto.

14. Sia $A\overset{\Delta}{B}C$ un triangolo isoscele tale che l'angolo al vertice è la metà di uno degli angoli alla base. Dimostrare che la bisettrice di un angolo alla base individua due triangoli isosceli.

15. In quale tipo di triangolo un angolo è congruente alla somma degli altri due?

16. In un triangolo isoscele $A\overset{\Delta}{B}C$ di vertice *A*, l'angolo $\hat{B}$ è doppio dell'angolo $\hat{A}$. Condotta la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, dimostrare che si vengono a formare due triangoli ancora isosceli.

17. Dimostrare che in un triangolo isoscele $A\overset{\Delta}{B}C$ di base *BC* l'angolo formato dalla base *BC* e dall'altezza *BK* relativa al lato *AC* è congruente alla metà dell'angolo $\hat{A}$.

18. Sia dato il triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ rettangolo in *B*. Sull'ipotenusa *AC* si prendano i segmenti *AD* e *CE* congruenti rispettivamente ad *AB* e *BC*, e si conducano *BE* e *BD*. Dimostrare che l'angolo $D\hat{B}E$ è la metà di un angolo retto.

19. Sia dato un triangolo equilatero. Dimostrare che se si prolunga un lato del triangolo di un segmento congruente al lato e si congiunge l'estremo di tale prolungamento con il terzo vertice si ottiene un triangolo rettangolo.

20. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo isoscele di vertice *A*. Si prolunghi *AB* di un segmento $AD \equiv AB$ e *AC* di un segmento $AE \equiv AC$. Si dimostri che $\overset{\Delta}{EBC}$ è rettangolo.

21. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ rettangolo in *A* e sia *M* il punto medio dell'ipotenusa. Si dimostri che il triangolo $\overset{\Delta}{AMB}$ è isoscele.

    Suggerimento

    Si costruisca il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABT}$ con ipotenusa $AT \equiv 2AM$.

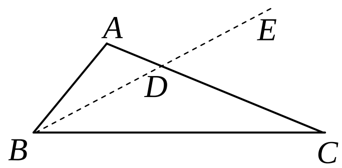
22. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ rettangolo in *A*. Si prolunghi *AB* di un segmento $AD \equiv AC$ e *AC* di un segmento $AE \equiv AB$. Si prolunghi la mediana *AM* relativa a *BC* fino ad incontrare *DE* nel punto *H*. Dimostrare che $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{ADE}$ sono congruenti e che *AH* è l'altezza relativa a *DE*.

    Suggerimento

    Si usi il risultato dell'esercizio precedente.

23. Calcolare l'ampiezza degli angoli interni di un poligono equiangolo avente otto lati.

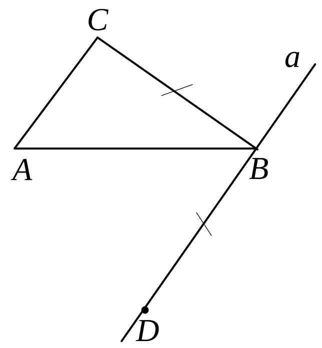
24. Nel triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con $\hat{B} > \hat{C}$ sia D il punto di AC tale che $A\hat{B}D \equiv \hat{C}$. Dimostrare che $\angle A\hat{B}C + \angle C\hat{D}B = 180^0$.



    Suggerimento

    $A\hat{D}E \equiv C\hat{D}B;\quad A\hat{D}E \equiv D\hat{A}B + A\hat{B}D \quad \Rightarrow \quad A\hat{D}E \equiv \hat{A} + \hat{C}$.

25. Con riferimento alla figura sottostante dove $\angle A\hat{C}B = 90^0, a \perp BC\ e\ BD \equiv BC,$ dimostrare che CD è bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$.



26. Dimostrare che l'altezza CH relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ divide questo in due triangoli con gli angoli rispettivamente congruenti a quelli del triangolo dato.

27. Dimostrare che in un triangolo rettangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ l'altezza relativa all'ipotenusa CH forma con il cateto minore AC un angolo più piccolo di quello che forma con l'altro cateto.

    Suggerimento

    $AC < BC \Rightarrow \hat{B} < \hat{A}$.

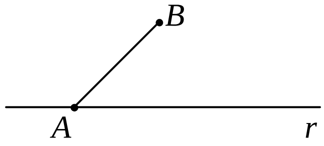
28. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:

    a. La somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a due angoli piatti.
    b. La somma degli angoli interni di un pentagono è congruente a due angoli piatti.
    c. La somma degli angoli interni di un esagono, presi uno solo per ciascun vertice, è congruente a quattro angoli retti.
    d. La somma degli angoli interni di un ottagono, presi uno solo per ciascun vertice, è congruente a due angoli giro.

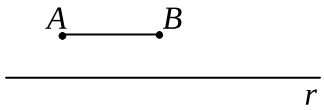
- **Perpendicolari ed oblique**

1. Disegnare la proiezione dell'obliqua *AB* sulla retta *r* nei seguenti casi:

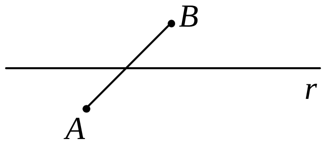
a.



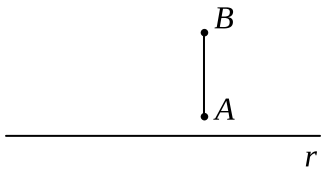
b.



c.



d.



2. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a. Il segmento perpendicolare condotto da un punto ad una retta è minore di qualsiasi obliqua (o segmento obliquo) condotto da quel punto alla stessa retta.
   b. Due segmenti obliqui condotti da un punto ad una retta ed aventi su questa proiezioni congruenti, possono anche non essere congruenti.
   c. La distanza di un punto da una retta è il segmento perpendicolare condotto dal punto alla retta.
   d. Due segmenti obliqui condotti da un punto ad una retta ed aventi su questa proiezioni non congruenti, sono non congruenti.

3. Perchè la proiezione di un segmento su una retta è minore del segmento stesso? Può essere uguale?

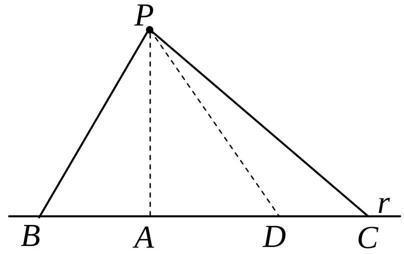
4. In un triangolo equilatero gli assi coincidono con le altezze, le mediane e le bisettrici. Perchè?

Suggerimento

Considerare la congruenza di due triangoli adiacenti.

5. Dimostrare che in un triangolo due vertici sono equidistanti dalla retta mediana che parte dal terzo vertice.

6. Dimostrare che se due oblique, condotte da un punto ad una retta ed aventi su questa proiezioni disuguali, sono disuguali e a proiezione maggiore corrisponde obliqua maggiore.



Suggerimento

a. Siano *PB, PC* due oblique condotte da *P* ad *r* (figura sopra) e tali che le loro proiezioni *AB* e *AC* siano disuguali con *AC>AB*. Si vuole dimostrare che *PC>PB*.
b. Poichè *AC>AB,* è possibile trovare un punto $D \in AC$ tale che $AD \equiv AB$.
c. Si unisca *D* con *P* e si ricordi quanto dimostrato nell'esercizio 21 (teoria).
d. Poichè l'angolo $P\hat{D}A$ è acuto (perchè...) allora $P\hat{D}C$ è...
e. Dal teorema 4 dell'Unità 2 segue la tesi.

7. Dati tre punti non allineati costruire un quarto punto che sia equidistante dai primi tre.

Suggerimento

Unire i punti e costruire gli assi.

- **Trapezi e parallelogrammi**

1. Disegnare un triangolo isoscele ed una retta parallela alla base che tagli i lati. In quali figure risulta diviso il triangolo? Giustificare la risposta.

2. Un trapezio si dice rettangolo quando uno dei lati è perpendicolare alla base. Un trapezio che sia nè isoscele nè rettangolo è detto scaleno. Disegnare un trapezio scaleno e prolungare i suoi lati

obliqui fino ad incontrarsi. Che triangolo si ottiene? Può anche accadere che tale triangolo sia isoscele, ma in tal caso quali lati risulteranno congruenti e a quale condizione si verifica ciò?

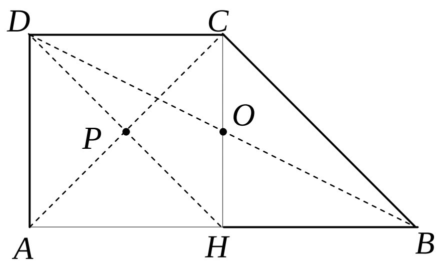
3. Disegnare un triangolo rettangolo ed una retta parallela ad un cateto che intersechi l'altro cateto. In quali figure risulta diviso il triangolo? E se la retta è parallela all'ipotenusa?
4. Dimostrare che gli angoli opposti di un trapezio isoscele sono supplementari.
5. Dimostrare che in un trapezio isoscele, avente la base minore congruente ai lati obliqui, ciascuna diagonale è bisettrice dell'angolo adiacente alla base maggiore.
6. Dimostrare che le diagonali di un trapezio isoscele sono congruenti e si dividono in parti rispettivamente congruenti.
7. Un parallelogramma può essere considerato come intersezione di due insiemi? In caso affermativo, di quali insiemi si tratta?
8. Nel trapezio isoscele *ABCD* con base maggiore *AB*, si conducano le due diagonali che si tagliano nel punto *O*. Dimostrare che sono congruenti i seguenti triangoli:
   a. $A\overset{\Delta}{B}D$ e $A\overset{\Delta}{B}C$;
   b. $A\overset{\Delta}{C}D$ e $B\overset{\Delta}{C}D$;
   c. $A\overset{\Delta}{O}D$ e $B\overset{\Delta}{O}C$.
9. In un trapezio *ABCD* rettangolo in *A* e *D* la base maggiore *AB* è congruente al lato *BC* e doppia della base minore *CD*. Dimostrare che il triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$ è equilatero.
10. Dimostrare che una qualunque retta condotta per il punto di intersezione delle diagonali di un parallelogramma lo divide in due trapezi congruenti.
11. Dimostrare che in un trapezio isoscele la congiungente i punti medi delle basi è perpendicolare ad esse e passa per il punto di intersezione dei lati obliqui.
12. Sia $A\overset{\Delta}{B}C$ un triangolo isoscele di base *BC*. Le bisettrici degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ intersecano i lati congruenti rispettivamente in *D* ed *E*. Dimostrare che *DE* divide il triangolo in due parti di cui una è

un trapezio isoscele avente i lati non paralleli congruenti alla base maggiore.

13. Dimostrare che in un qualsiasi trapezio le bisettrici degli angoli adiacenti ad un lato obliquo sono perpendicolari fra di loro.
14. Nel trapezio *ABCD* la base *AB* è doppia della base *CD*. Siano *P* il punto di intersezione dei prolungamenti dei lati obliqui, *M* il punto medio di *AB* ed *N* il punto medio di *CD*. Dimostrare che *N* è il punto medio di *PM*.
15. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

Hp: $AD \equiv CD$; $2CD \equiv AB$; $CH \perp AB$

Ts: $BD \equiv OD; CO \equiv OH$; $AP \equiv PC; DP \equiv PH$; $PO // DC$; $PO \equiv \frac{1}{2} DC$

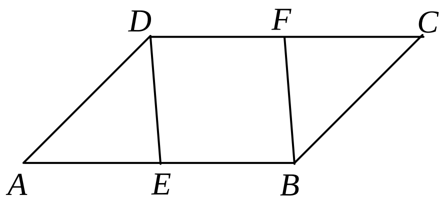


Dimostrare la tesi e calcolare la misura degli angoli del trapezio in questione.

16. Dimostrare che prendendo sui lati di un parallelogramma, a partire dai vertici e sempre nello stesso senso, quattro segmenti congruenti, si ottengono i vertici di un altro parallelogramma.
17. Dimostrare che prolungando i lati di un parallelogramma di uno stesso segmento, in un medesimo senso, si ottengono i vertici di un altro parallelogramma.
18. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

Hp: $AB \equiv CD$; $AB // CD$; $AE \equiv CF$

Ts: $EB \equiv FD$; $EB // FD$



Dimostrare la tesi.

19. Date due rette parallele tagliate da una trasversale, condurre le bisettrici delle coppie di angoli coniugati interni. I loro punti di intersezione e i punti di intersezione della trasversale con le rette parallele individuano un quadrilatero. Dimostrare che tale quadrilatero è un parallelogramma.

20. Dai vertici opposti A e C di un parallelogramma $ABCD$ si conducano le perpendicolari AE e CF alla diagonale BD. Dimostrare che:

    a. $AE \equiv C$;
    b. il quadrilatero $AECF$ è un parallelogramma.

21. Sia $ABCD$ un parallelogramma e O il punto di intersezione delle diagonali. Dimostrare che ogni retta per O interseca i lati del parallelogramma in due punti equidistanti da O.

22. Prolungando la mediana AM di un triangolo ABC di un segmento $MD \equiv AM$ si ottiene il quadrilatero $ABCD$. Dimostrare che $ABCD$ è un parallelogramma.

23. Dimostrare che in ogni trapezio il segmento che unisce i punti medi delle diagonali è congruente alla semidifferenza delle basi.

24. Dimostrare che due parallelogrammi sono congruenti se hanno:

    a. una diagonale e due lati consecutivi rispettivamente congruenti;
    b. due diagonali e l'angolo da esse compreso rispettivamente congruenti.

25. Si prolunghino i lati AB e AD del parallelogramma $ABCD$ dei segmenti $BM \equiv AD$ e $DN \equiv AB$. Dimostrare che i triangoli DNC e BMC sono isosceli e che i punti M, N, C sono in linea retta.

26. Dato un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, dimostrare che il segmento che unisce i punti medi M ed N dei lati AB e AC e la mediana AP relativa al terzo lato BC si tagliano scambievolmente per metà.

27. Dimostrare che il segmento che congiunge i punti medi dei lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è la metà di esso.

Suggerimento

a. considerato il triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$, sia M il punto medio di AB ed N il punto medio di AC;
b. da B si conduca la parallela al lato AC fino ad incontrare in P il prolungamento del segmento MN. Si considerino i triangoli $M\overset{\Delta}{N}C$ e $B\overset{\Delta}{N}P$. Come sono?
c. Quindi sarà $MC \equiv BP$ e di conseguenza BP sarà non solo parallelo, ma anche... a AM, per cui il quadrilatero $BCPM$ è un...

28. Dimostrare che i punti medi dei lati di un quadrilatero sono vertici di un parallelogramma.

Suggerimento

Dopo aver congiunto i punti medi dei lati del quadrilatero, tracciare una diagonale del quadrilatero e tener conto dell'esercizio precedente.

29. Dimostrare che i segmenti che uniscono i punti medi dei lati opposti di un quadrilatero si dividono scambievolmente per metà.

30. In un parallelogramma $ABCD$ si traccino le bisettrici dei due angoli $\hat{B}\, e\, \hat{D}$ fino ad incontrare i lati opposti rispettivamente in M e in N. Dimostrare che:

a. il quadrilatero $BMDN$ è un parallelogramma;
b. i triangoli $A\overset{\Delta}{N}D$ e $B\overset{\Delta}{M}C$ sono congruenti;
c. le diagonali dei parallelogrammi $ABCD$ e $BMDN$ si tagliano nello stesso punto.

o Rettangoli, rombi, quadrati

1. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:

a. Un quadrilatero può avere quattro angoli ottusi.
b. Un parallelogramma può avere le diagonali perpendicolari e non essere un rombo.
c. Un trapezio può avere tre lati congruenti.
d. Un rombo è un parallelogramma con tutti gli angoli congruenti.

e. In un rombo le diagonali sono perpendicolari fra loro.
f. In un parallelogramma le diagonali sono congruenti.
g. Un quadrato è un rettangolo e un rombo.

2. Dato un rettangolo *ABCD*, prolungare il lato *AB* di un segmento $BE \equiv BC$, il lato *BC* di un segmento $CF \equiv CD$, il lato *CD* di un segmento $DG \equiv DA$ e il lato *DA* di un segmento $AH \equiv AB$. Dimostrare che il quadrilatero *HEFG* è un parallelogramma.
3. Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un rombo si ottiene un rettangolo.

   Suggerimento
   Dimostrare prima che il quadrilatero ottenuto congiungendo i punti medi dei lati del rombo ha i lati opposti congruenti e paralleli e poi che esso ha anche le diagonali congruenti.
4. Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un trapezio isoscele si ottiene un rombo.
5. Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un rettangolo si ottiene un rombo.
6. Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un quadrato si ottiene ancora un quadrato.
7. Dimostrare che se da un punto qualunque della bisettrice di un angolo si tracciano le parallele ai lati si ottiene un rombo.
8. Dimostrare che se da un punto qualunque della bisettrice di un angolo retto si tracciano le parallele ai lati si ottiene un quadrato.
9. Dimostrare che congiungendo per i vertici di un quadrato le perpendicolari alle diagonali si ottiene un altro quadrato.
10. Dimostrare che le bisettrici dei quattro angoli interni di un rettangolo individuano un quadrato.
11. Dimostrare che le bisettrici degli angoli di un parallelogramma formano un rettangolo.
12. Sui cateti di un triangolo rettangolo si costruiscano, esternamente al triangolo, i rispettivi quadrati. Dimostrare che due diagonali di questi quadrati sono parallele e le altre due sono perpendicolari.
13. Nel triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base *BC* prolungare dalla parte del vertice *A* i lati congruenti *BA* e *CA* dei segmenti

$AD \equiv AC$ e $AE \equiv AB$. Dimostrare che il quadrilatero *BCED* è un rettangolo.

14. Sui lati di un rettangolo *ABCD* ed esternamente ad esso si considerino i triangoli equilateri ABE, BCF, DAH. Dimostrare che *EFGH* è un rombo.

15. Dimostrare che il punto di intersezione delle diagonali di un rombo è equidistante dai lati del rombo.

16. Dal punto di intersezione delle diagonali di un rombo si conducano le perpendicolari ai lati. Dimostrare che i piedi di queste perpendicolari sono vertici di un quadrato.

17. Dimostrare che le bisettrici degli angoli di un rettangolo formano un quadrato.

18. Dimostrare che le bisettrici degli angoli formati dalle diagonali di un rombo intersecano i lati in quattro punti che sono vertici di un quadrato.

19. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

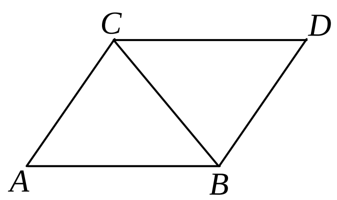
$Hp:\quad AB \parallel CD$

$BC \parallel DA$

$AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$

$\hat{B} \equiv 2\hat{A}$

$Ts:\quad BD \equiv AB$



Dimostrare la tesi.

20. Sia *ABCD* un rombo e *O* il punto di intersezione delle diagonali. Da *O* si conducano le perpendicolari *OP, OR, OS, OT* rispettivamente ai lati *DA, AB, BC, CD.* Dimostrare che i punti *P, O, S e T, O, R* sono rispettivamente allineati.

21. Dai vertici di un rombo tracciare le parallele alle diagonali. Dimostrare che esse si intersecano a due a due in punti che sono vertici di un rettangolo.

11. Circonferenza e cerchio

11.1. Definizioni

Una delle figure geometriche, il cui modello è più diffuso nella realtà, è la circonferenza. Infatti oggetti di forma circolare ne conosci tanti, dalla semplice monetina, alla ruota dell'automobile o della bicicletta e così via. D'altra parte, se pur intuitivamente, hai imparato cosa è una circonferenza e ne sai costruire un'immagine col compasso. Devi, ora, compiere un ulteriore passo in avanti rendendoti conto della definizione rigorosa ed astratta e della descrizione razionale delle sue proprietà.

Definizione 16

> Chiamasi ***circonferenza*** l'insieme di tutti e soli i punti del piano che hanno distanza assegnata da un punto fisso dello stesso piano.

Il punto fisso si chiama **centro** della circonferenza; la distanza costante di un qualsiasi punto della circonferenza dal centro si chiama **raggio**; il segmento che unisce un punto della circonferenza al centro, la cui misura è il raggio, per non appesantire ulteriormente il linguaggio lo chiamiamo anche **raggio**. La circonferenza di centro *O* e raggio *r* la indicheremo con $C(O,r)$.

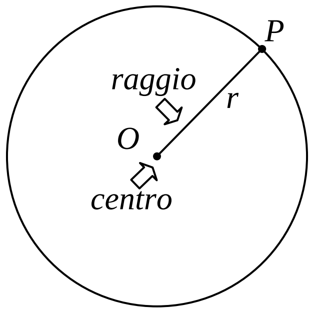


Figura 23 - Circonferenza di centro *O* e raggio *r*.

Così la definizione 16, in simboli, diventa:

$$C(O,r)=\{P\in\alpha \mid d(O,P)=r\}.$$

L'insieme delle circonferenze lo indichiamo con $\mathcal{Cir}$. Risulta quindi $\mathcal{Cir} \subset \mathcal{F}$.

Data una circonferenza nel piano riconosci facilmente, pur dal punto di vista intuitivo, quando un punto è interno o esterno ad essa; diamone, però, una definizione rigorosa.

Definizione 17

Sia $C(O,r)$ una circonferenza e un punto P non appartenente ad essa, se:

$d(O,P) < r$ P si dice **interno** alla circonferenza;
$d(O,P) > r$ P si dice **esterno** alla circonferenza.

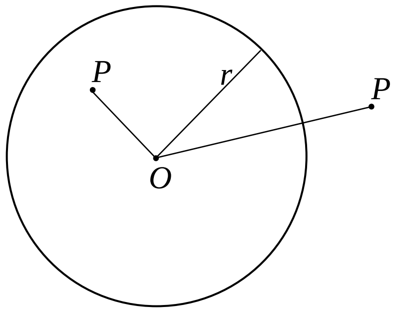


Figura 24 - Punti esterni ed interni ad una circonferenza.

Definizione 18

La figura costituita da una circonferenza di centro O e raggio r, e dai suoi punti interni si chiama ***cerchio*** di centro O e raggio r, e si indica con $\overline{C}(O,r)$. In simboli:

$$\overline{C}(O,r) = \{P \in \alpha \mid d(O,P) \leq r\}$$

Definizione 19

Ogni segmento che unisce due punti di una circonferenza si chiama **corda**; una corda passante per il centro si dice **diametro**.

Esercizio 31

Un diametro è doppio del raggio?

Esercizio 32

Dimostra che ogni corda non passante per il centro è minore del diametro.

Suggerimento

Osserva la Figura 25 ed applica ....

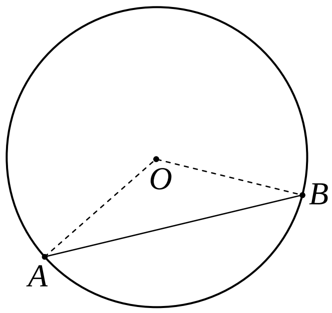


Figura 25 - $C(O,r)$, corda *AB*.

Esercizio 33

L'asse di ogni corda di una circonferenza passa per il centro.

Suggerimento

Tieni conto della definizione di asse, di centro e dell' Esercizio 16.

Esercizio 34

Dimostra che corde congruenti hanno uguali distanza dal centro.

Esercizio 35

Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza.

Suggerimento

Se *A*, *B*, *C* sono tre punti non allineati, il centro di una circonferenza che passa per essi deve giacere sia sull'asse del segmento *AB* che su quello di *BC* e questi due assi essendo perpendicolari alle due rette ... devono intersecarsi in un punto O che risulta equidistante dai punti .... Perciò la circonferenza di centro O e raggio ... passa anche per ....

La circonferenza è una linea chiusa, cioè non basta un suo punto per dividerla in due parti. Essa risulta, invece, divisa in due parti da due suoi punti A e B quali si vogliano (Figura 26). Ciascuna di queste due parti della circonferenza si dice ***arco circolare*** di estremi A e B e si denota con $\overset{\frown}{AB}$. Per distinguere i due archi l'uno dall'altro, basta dare un terzo punto, oltre gli estremi: così, l'arco di estremi A e B passante per C si indica con $A\overset{\frown}{C}B$. Se dal centro O si conducono le due semirette OA e OB, ciascuno dei due archi giace per intero in uno dei due angoli $A\hat{O}B$, i quali sono uno concavo e l'altro convesso, salvo quando A e B sono diametralmente opposti sulla circonferenza: in tal caso i due angoli $A\hat{O}B$ sono entrambi piatti e l'arco $\overset{\frown}{AB}$ si chiama **semicirconferenza**.

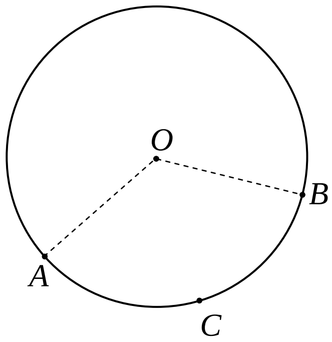


Figura 26 - Arco circolare $A\overset{\frown}{C}B$.

In ogni caso gli angoli $A\hat{O}B$ si chiamano ***angoli al centro***; un angolo al centro e l'arco in esso contenuto si dicono fra loro *corrispondenti*. Talvolta si dice che un angolo al centro "*insiste*" sull'arco corrispondente.

11.2. Angoli al centro e alla circonferenza

Di particolare interesse risultano gli angoli con vertice sulla circonferenza.

Definizione 20

Sia $C(O,r)$ una circonferenza e B un suo punto. Un angolo di vertice B e lati uno secante $C(O,r)$ e l'altro secante o tangente (in B) $C(O,r)$ si dice ***angolo alla circonferenza***.

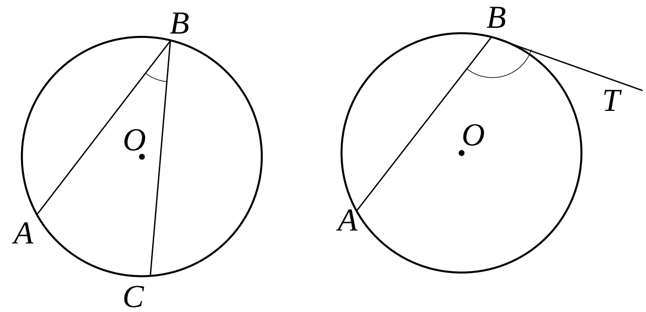


Figura 27 - Angoli alla circonferenza.

Nel primo caso, dei due archi $\overset{\frown}{AB}$ in cui la circonferenza è divisa dai suoi punti A e C, l'uno ($\overset{\frown}{ABC}$) è tutto esterno all'angolo $A\hat{B}C$, mentre l'altro è tutto contenuto o compreso in esso. Si suole dire che l'angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$ *insiste* su tale arco, o che è *inscritto* nell'arco $\overset{\frown}{ABC}$.

Nell'altro caso (lato tangente in B), si dice che l'angolo $A\hat{B}T$ è *inscritto* in quello dei due archi $\overset{\frown}{AB}$ che risulta esterno ad esso e *insiste* sull'altro arco $\overset{\frown}{AB}$.

In ogni caso, l'angolo al centro corrispondente all'arco su cui insiste un angolo alla circonferenza si dice anche *corrispondente* a questo angolo. Per esempio, nella Figura 28 l'angolo al centro corrispondente all'angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$ è $A\hat{O}C$, mentre l'angolo al centro corrispondente all'angolo $A\hat{B}T$ è $A\hat{O}B$.

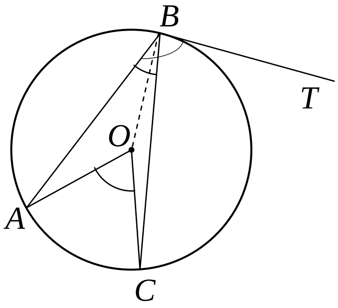


Figura 28 - Angoli alla circonferenza e al centro corrispondenti
caso generale.

L'importanza degli angoli alla circonferenza e al centro corrispondenti è segnalata dal seguente

Teorema 10

Ogni angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro corrispondente.

Dimostrazione

Conviene distinguere tre casi:

1. *L'angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$ ha un lato AB che passa per il centro O e un altro secante. (*Figura 29*)*
   Il corrispondente angolo al centro $A\hat{O}C$ è esterno al triangolo $\overset{\Delta}{BOC}$ ed è quindi ... alla somma dei due angoli non adiacenti (cfr. unità 3, esercizio 16), cioè $A\hat{O}C \equiv O\hat{C}B + O\hat{B}C$. Ma il triangolo $\overset{\Delta}{BOC}$ è ... rispetto alla base *BC*, per cui $A\hat{O}C \equiv 2 \cdot \ldots$ o anche $O\hat{B}C \equiv \frac{1}{2} \cdot \ldots$.

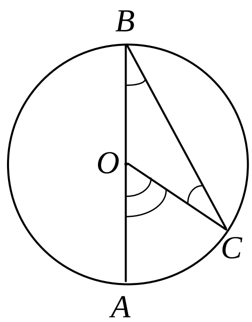


Figura 29 - Angoli alla circonferenza e al centro corrispondenti.
Caso 1

2. *L'angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$ ha due lati secanti e giacenti da parti opposte o dalla stessa parte rispetto al diametro BD passante per il vertice B. (*Figura 30*)*
   Congiunto il centro *O* con *A* e *C* si ha in entrambi i casi, per la parte □, $A\hat{B}D \equiv \frac{1}{2} A\hat{O}D$ e $C\hat{B}D \equiv \frac{1}{2} C\hat{O}D$. Sommando o sottraendo membro a membro queste uguaglianze si conclude che, nell'uno e nell'altro caso, si ha $A\hat{B}C \equiv \frac{1}{2} A\hat{O}C$.

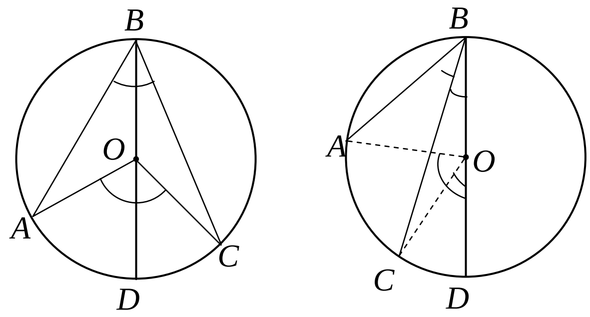


Figura 30 - Angolo alla circonferenza e al centro corrispondente.
Caso 2

3. *L'angolo alla circonferenza $A\hat{B}T$ ha un lato BT tangente ed uno secante.*
   (

Figura *31*)

Possiamo avere tre sottocasi, a seconda che l'altro lato *BA* passa per il centro *O* oppure cade da parte opposta o dalla stessa parte di *BT*, rispetto al diametro *BD* passante per *B*.

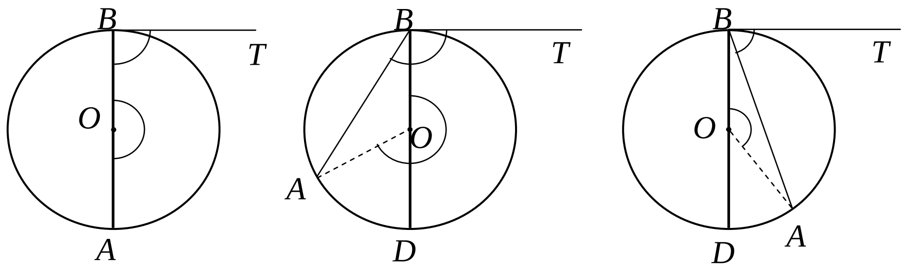


Figura 31 - Angolo alla circonferenza e al centro corrispondente. *Caso 3*

Esercizio 36

Dimostra che ogni angolo iscritto in una semicirconferenza è retto.

Suggerimento

Applica il teorema 10.

Esercizio 37

Dimostra che angoli inscritti in uno stesso arco sono congruenti.

Esercizio 38

Data una circonferenza $C(O,r)$ e un punto esterno a $C(O,r)$, considera la circonferenza di diametro *OA*; essa interseca $C(O,r)$in due punti (perché?) H e K. Dimostra che le rette AH e AK sono tangenti a $C(O,r)$ nei punti H e K e non esistono altre rette per A tangenti alla circonferenza data (Figura 32).

Suggerimento

Considera i raggi OH e OK; gli angoli $O\hat{H}A$ e $O\hat{K}A$ sono retti perché .... Perciò le rette AH e AK sono ... (cfr. esercizio 8). Supponi che ci sia un'altra tangente condotta da A e sia L il punto di tangenza. L'angolo $O\hat{L}A$ sarebbe ... e il punto L dovrebbe stare sulla circonferenza di diametro OA, e sarebbe un terzo punto in comune tra le due circonferenze, e ciò ....

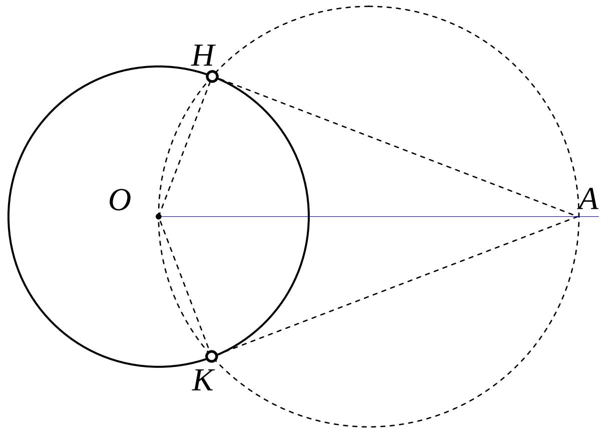


Figura 32 - $C(O,r)$, *A esterno a* $C(O,r)$.

Esercizio 39

Dimostra che i segmenti di due tangenti condotte da un punto a una circonferenza compresi fra il punto e i punti di contatto sono congruenti e formano angoli congruenti con la retta che unisce questo punto col centro.

Suggerimento

In riferimento alla Figura 32, considera i due triangoli $O\overset{\Delta}{H}A$ e $O\overset{\Delta}{K}A$: essi sono ... per avere .... In particolare risulta ....

11.3. Punti notevoli di un triangolo

Definizione 21

Dato un triangolo, si chiama:

- ***circocentro*** il centro della circonferenza circoscritta al triangolo;
- ***incentro*** il centro della circonferenza inscritta al triangolo.

Esercizio 40

Dimostra che il circocentro e l'incentro di un triangolo sono rispettivamente il punto di incontro degli assi dei *lati* e delle *bisettrici* degli angoli.

Esistono due altri punti notevoli del piano di un triangolo di cui, però, bisogna prima provare l'esistenza.

Teorema 11

Le altezze di un triangolo, o i loro prolungamenti, si incontrano in uno stesso punto.

Dimostrazione

Sia $A\overset{\Delta}{B}C$ un triangolo (Figura 33) e siano *AN*, *BP* e *CM* le sue altezze. Per ciascun vertice tracciamo la retta parallela al lato opposto e sia $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ il triangolo che si determina. Osserviamo che i punti *A*, *B*, *C*, vertici del triangolo $A\overset{\Delta}{B}C$, sono i punti medi rispettivamente dei lati *B'C'*, *C'A'*, *A'B'* del triangolo $A'\overset{\Delta}{B'}C'$. Infatti il quadrilatero *C'BCA* è un parallelogramma perché ..., sarà in particolare $C'B \equiv$.... Analogamente si dimostra che è un parallelogramma *BA'CA*; ed è in particolare $BA' \equiv$.... Si deduce che $C'B \equiv BA'$, poiché ... e quindi *B* è il punto medio .... In modo analogo si dimostra che *C* è il punto medio del lato *B'A'* ed *A* è il punto medio del lato *B'C'*. Essendo $CM \perp AB$, si ha $CM \perp \ldots$ e quindi *CM* è l'asse di $A'B'$. Allo stesso modo, *AN* e *BP* sono rispettivamente assi dei lati $B'C'$ e $A'C'$. Ma gli assi dei lati di un triangolo si incontrano nel ... (Esercizio 40).

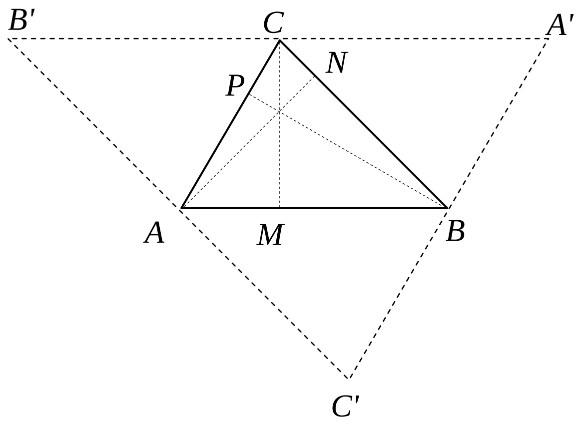


Figura 33 - Ortocentro di un triangolo.

Definizione 22

Il punto di incontro delle tre altezze di un triangolo si chiama ***ortocentro***.

11.4. Esercizi supplementari

- **Circonferenza e cerchio**

1. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
    a. Due cerchi congruenti hanno raggio congruente.
    b. Due circonferenze di raggio congruente sono congruenti.
    c. In una circonferenza ogni diametro è minore di qualsiasi corda non passante per il centro.
2. Se si congiunge il centro di una circonferenza con gli estremi di una qualsiasi corda, che triangolo si ottiene?
3. Disegnare una circonferenza e due dei suoi diametri. Dimostrare che unendo gli estremi di questi diametri si ottengono due coppie di corde congruenti.
4. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:
    a. La circonferenza è una linea i cui punti hanno tutti uguale distanza da uno stesso punto detto centro.

b. Il cerchio è l'insieme di tutti i punti di una circonferenza e di quelli interni ad essa.
c. Una corda è un segmento che congiunge due punti di un cerchio.
d. L'asse di una corda passa per il centro della circonferenza.
e. Se due corde sono disuguali, quella maggiore ha anche maggiore distanza dal centro.

5. Tracciata una corda di una circonferenza, trovare due punti sulla circonferenza tali che siano vertici di due triangoli isosceli aventi quella corda come comune base.

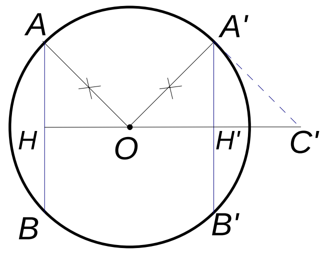
   Suggerimento
   Condurre l'asse della corda.

6. Dimostrare che il diametro perpendicolare ad una corda divide questa in due parti congruenti.

7. Considerati due punti, costruire la circonferenza passante per essi ed avente raggio congruente al doppio della distanza tra i due punti.

   Suggerimento
   Il segmento che congiunge i due punti è una corda della circonferenza il cui centro si deve trovare su ...

8. Dimostrare che in una circonferenza corde congruenti hanno eguale distanza dal centro.

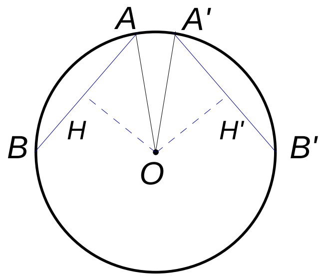


Linea risolutiva

a. Siano AB, A'B' (fig. sopra) due corde congruenti di una circonferenza e siano OH, OH' le loro distanze dal centro O.
b. Prolunga il cateto OH' del triangolo rettangolo $O\overset{\Delta}{H'}A'$ di un segmento $H'C' \equiv OH$ e unisci A' con C'.

c. I triangoli $O\overset{\Delta}{H}A$ e $C'\overset{\Delta}{H'}A'$ sono congruenti perché .... Ne segue che $A'C' \equiv AO$.
d. Poiché $AO \equiv OA'$, si ha $A'C' \equiv OA'$, per transitività.
e. Pertanto $O\overset{\Delta}{A'}C'$ è un triangolo isoscele sulla base OC'.
f. Concludi ...

9. Dimostrare che in una stessa circonferenza corde egualmente distanti dal centro sono congruenti.



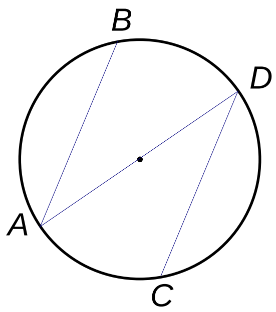
Suggerimento

a. Siano AB, A'B' due corde che hanno eguale distanza dal centro O (fig. sopra).
b. $O\overset{\Delta}{H}A \equiv O\overset{\Delta}{H'}A'$ perché .....
c. Concludi ....

10. Dimostrare che se due corde di una circonferenza sono parallele, le corde che si ottengono congiungendo gli estremi di esse sono congruenti.

11. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

Hp: $AB \parallel CD$ *Ts:* $AB \equiv CD$



Dimostrare la tesi.

12.
Se per gli estremi di un diametro di una circonferenza si conducono, da bande opposte, due corde parallele e si uniscono i loro estremi con quelle del diametro si ottiene un parallelogramma. Quale?

13. Se si uniscono gli estremi di due diametri perpendicolari che tipo di quadrilatero si ottiene? Perchè?

14. Se dagli estremi di una corda si conducono due corde parallele e si uniscono gli estremi di esse che figura si ottiene? Quando sarà un quadrato? Quando un rombo?

15. Siano *AB* e *CD* due corde congruenti di una circonferenza di centro *O*. Dimostrare che $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$.

16. Il triangolo $A\overset{\Delta}{O}B$ ha il vertice O coincidente con il centro di una circonferenza ed è isoscele sulla base *AB*. I lati *AO* e *BO* intersecano la circonferenza nei punti *M* ed *N*. *MN* è parallela ad *AB*?

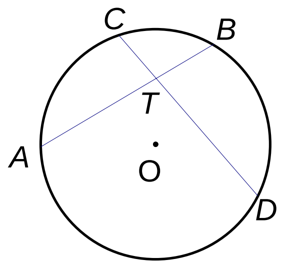
Suggerimento

$M\overset{\Delta}{O}N$ è un triangolo ..., gli angoli alla base ...

17. Siano *AB* e *CD* due corde che si intersecano nel punto *P* e che formano angoli congruenti con il diametro passante per *P*. Dimostrare che $AB \equiv CD$.

18. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi.

Hp: $AB \equiv CD$ *Ts*: $T\hat{O}A \equiv T\hat{O}D$

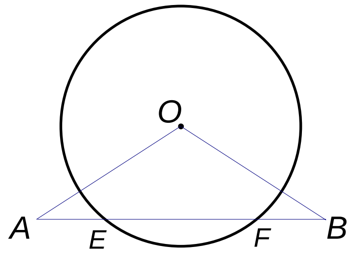


Dimostrare la tesi.

19. Siano AB e CD due corde congruenti che si intersecano nel punto *P*. Dimostrare che esse formano angoli congruenti con il diametro passante per *P*.

20. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

Hp: $AO \equiv OB$ *Ts:* $AE \equiv FB$



Dimostrare la tesi.

21. Su una corda di una circonferenza di centro *O* si prendano due punti *A* e *B*, equidistanti dal punto medio. Dimostrare che $AO \equiv BO$.

22. Da un estremo di un diametro si conducano due corde che formano angoli congruenti con il diametro. Dimostare che le due corde hanno uguale distanza dal centro.

23. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:

    a. Due circonferenze distinte non possono avere più di due punti in comune.
    b. Un angolo al centro è un angolo con il vertice nel centro di una circonferenza.
    c. Ad ogni angolo al centro corrisponde un arco sulla circonferenza, e viceversa.
    d. La circonferenza non è una figura geometrica.

24. Dimostrare che il diametro perpendicolare ad una corda dimezza l'angolo al centro.

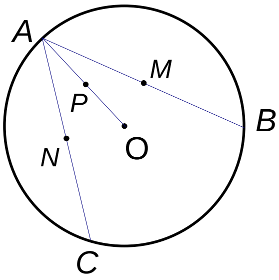
25. Fissati tre punti *A*, *B*, e *C* su una circonferenza di centro *O* tali che $A\hat{O}B \equiv 2B\hat{O}C$, dimostrare che $AB \equiv 2BC$.

    Suggerimento
    Condurre la corda AB e il diametro ad essa perpendicolare. Tener conto del risultato dell'esercizio precedente.

26. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

Hp: $AM \equiv MB$ *Ts:* $MP \equiv PN$

$AP \equiv PO$
$AN \equiv NC$

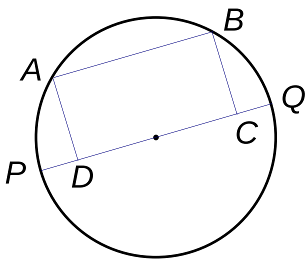


Dimostrare la tesi.

27. Sia $\overset{\Delta}{AOB}$ un triangolo isoscele con vertice *O* nel centro di una circonferenza, la quale taglia i lati *AO* e *OB* rispettivamente nei punti *M* e *N*. Dimostrare che *MN* // *AB*.

28. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

Hp: $AB // PQ$ $\quad$ *Ts:* $PD \equiv CQ$
$AD \perp PQ$
$BC \perp PQ$



Dimostrare la tesi.

29. Dimostrare che se due corde sono parallele, l'asse di una di esse è anche asse dell'altra.

30. In una circonferenza di centro *O* siano *AB* e *CD* due corde parallele tra loro e si tracci il diametro perpendicolare ad entrambe. Dimostrare che $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}D$ e $AC \equiv BD$.

- **Angoli alla circonferenza**

1. Stabilire quali dei seguenti enunciati è vero:
   a. Un angolo alla circonferenza è un angolo con il vertice sulla circonferenza.

   b. Un angolo al centro è metà di ogni angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.
   c. Un angolo inscritto in una circonferenza è retto.

2. Disegnare due angoli alla circonferenza con i lati secanti, due angoli con un lato secante e l'altro tangente, e gli angoli al centro che insistono rispettivamente sugli stessi archi.

3. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:

   a. Ad ogni angolo alla circonferenza corrisponde un determinato angolo al centro.
   b. Ad ogni angolo al centro corrisponde un determinato angolo alla circonferenza.
   c. Un angolo alla circonferenza può essere concavo.
   d. Un angolo al centro può essere concavo.
   e. Se un angolo alla circonferenza è acuto, anche il corrispondente angolo al centro è acuto.
   f. Se un angolo alla circonferenza è ottuso, anche il corrispondente angolo al centro è ottuso.

4. Dimostrare che un angolo alla circonferenza è acuto se insiste su un arco minore di una semicirconferenza, è ottuso se insiste su un arco maggiore di una semicirconferenza.

5. Come si può determinare il centro di una circonferenza servendosi solo di una squadra?

   Suggerimento

   Facendo coincidere il vertice dell'angolo retto di una squadra con un punto della circonferenza, si ha che i punti in cui i due cateti della squadra tagliano la circonferenza sono gli estremi di ... Quindi il segmento che congiunge tali estremi è un ... Ripetendo la stessa operazione dopo aver cambiato la posizione della squadra si ottiene ... Concludi.

6. Dimostrare che angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti.

7. Dimostrare che se su un arco *AC* di circonferenza si considerano tre archi congruenti $AB \equiv BC \equiv CD$, allora nel triangolo $A\overset{\Delta}{B}D$ si ha $\hat{A} \equiv 2\hat{D}$.

8. Sia *AB* il diametro di una circonferenza di centro *O*. Per il punto *A* si tracci una corda *AC* e per il punto *C* una tangente, che incontra

in D la tangente nel punto B. Dimostrare che OD e AC sono paralleli.

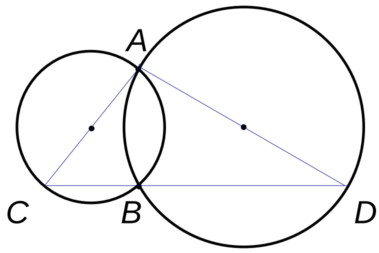
9. Siano AB e CD due diametri qualunque di una stessa circonferenza. Dimostrare che i triangoli ADC e ABC sono congruenti.

10. Data una circonferenza di diametro AB, sia OC la bisettrice dell'angolo al centro $B\hat{O}D$. Dimostrare che $OC // AD$.

11. Siano AB e DE due diametri perpendicolari di una circonferenza di centro O e AC una corda tale che $A\hat{O}C = 60°$. Dimostrare che CE e CD sono le bisettrici, interna ed esterna dell'angolo $A\hat{C}B$.

12. Sia P un punto esterno ad una circonferenza di centro O. Da P si traccino le tangenti che intersecano la circonferenza nei punti A e B ed una terza tangente nei punti C e D. Dimostrare che l'angolo $A\hat{O}B$ è doppio dell'angolo $C\hat{O}D$.

13. Assegnate due circonferenze secanti (fig. sottostante), si conducano per un punto di intersezione i due diametri AC, AD.



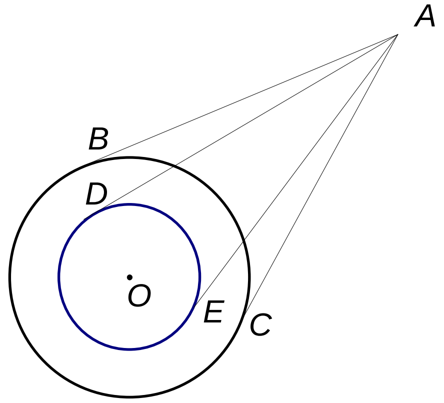
Dimostrare che $C\hat{B}D = 180°$, dove B è il secondo punto d'intersezione.

Suggerimento

Condurre la corda AB e considerare gli angoli inscritti in un semicerchio.

14. Se da due punti simmetrici rispetto al centro si conducono le tangenti alla circonferenza, si ottiene un parallelogramma? Quale deve essere la posizione dei due punti perchè si abbia un quadrato?

15. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con tesi: $B\hat{A}D \equiv E\hat{A}C$

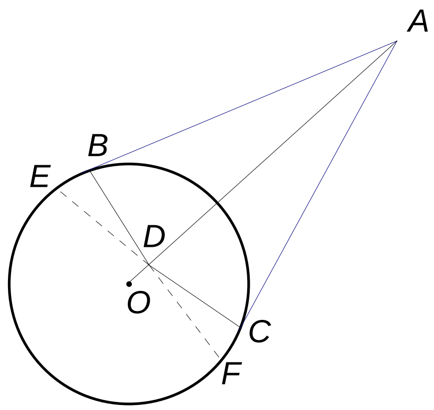


Dimostrare inoltre che *B,C,D,E* sono i vertici di un trapezio isoscele, le cui diagonali si intersecano su *AO*.

16. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

Hp: $AD \equiv AC$

Ts: $O\hat{C}E \equiv O\hat{E}C$
$A\hat{C}D \equiv A\hat{D}C$
$E\hat{O}A = 90°$
$O\hat{C}E \equiv E\hat{C}B$



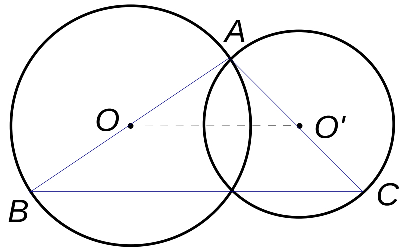
Dimostrare la tesi.

17. Si conduca la bisettrice di un angolo alla circonferenza e per il punto di intersezione di questa con la circonferenza si tracci la corda parallela ad uno dei lati dell'angolo. Dimostrare che tale corda è congruente alla corda staccata dalla circonferenza sull'altro lato dell'angolo.

18. Si consideri la circonferenza avente per diametro un lato di un triangolo. Dimostrare che i punti di intersezione della circonferenza con gli altri due lati del triangolo sono i piedi delle altezze relative ai due lati.

19.

Sia *A* uno dei punti di intersezione di due circonferenze di centri *O* e *O'*. Da A si conducano i due diametri *AB* e *AC*. Dimostrare che *BC* è parallelo ad *OO'*.



- **Poligoni iscritti e circoscritti a una circonferenza**

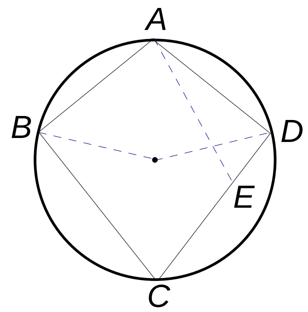
1. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono falsi:
   a. Un poligono si dice inscritto in una circonferenza se almeno un suo vertice è sulla circonferenza.
   b. Un poligono si dice circoscritto ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.
   c. Tutti i poligoni hanno l'apotema.
   d. Se un poligono è inscritto in una circonferenza, gli assi dei lati si incontrano in un punto.
   e. Se un poligono è circoscritto ad una circonferenza, la bisettrice di ogni angolo passa per il centro della circonferenza.

2. Dato un triangolo rettangolo, tracciare la circonferenza ad esso circoscritta e dimostrare che questa ha come centro il punto medio dell'ipotenusa.

3. Dimostrare che se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, gli angoli opposti sono supplementari

   Suggerimento
   L'angolo al centro è doppio di ogni angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.

4. Dimostrare che ogni quadrilatero avente gli angoli opposti supplementari, è inscrittibile in una circonferenza.



Linea risolutiva

a. Nel quadrilatero *ABCD* (fig. sopra) gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{C}$ sono supplementari.
b. Per i punti *A*, *B*, *C* passa una ed una sola circonferenza. E' sufficiente dimostrare che essa passa anche per *D*.
c. Supponi per assurdo che non passi per *D* e che incontri il lato *CD* in un suo punto E, allora $A\hat{E}C + A\hat{B}C = 180°$ perché .....
d. Ne segue che $A\hat{E}C = A\hat{D}E$ perché .....
e. Concludi.

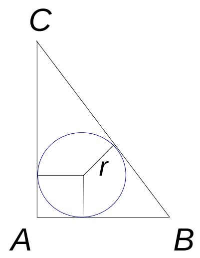
5. Dimostrare che ogni trapezio inscritto in una circonferenza è isoscele.

   Suggerimento
   Corde parallele staccano archi congruenti e archi congruenti sottendono corde congruenti.

6. Data una circonferenza circoscrivere ad essa un quadrilatero e dimostrare che le bisettrici degli angoli del quadrilatero passano per il centro della circonferenza.

7. Dimostrare che il diametro del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo è congruente alla differenza fra la somma dei cateti e l'ipotenusa.

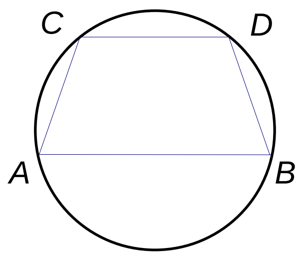
   Suggerimento
   Sono congruenti i segmenti: delle due tangenti condotte da un punto



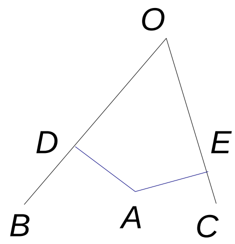
ad una circonferenza. Inoltre, osserva che $(AB - r) + (AC - r) = BC$.

8. Dimostrare che il lato di un triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza è il doppio del lato del triangolo equilatero inscritto.
9. Disegnare il triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$ inscritto in una circonferenza di centro *O. C*ondotte le tangenti nei punti *A* e *B,* sia *E* il loro punto di intersezione. Determinare la misura di ciascun angolo del quadrilatero *AOBE*.
10. Dimostrare che in un triangolo rettangolo la somma dei due cateti è congruente alla somma dell'ipotenusa e del diametro della circonferenza inscritta nel triangolo.
11. Dimostrare che le tre circonferenze aventi per centro i vertici di un triangolo e passanti per i punti di contatto della circonferenza inscritta sono tangenti a due a due.
12. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

    Hp: $AB // CD;\ AD \equiv CB$ *Ts:* $AD \equiv \dfrac{DC + AB}{2}$

    Dimostrare la tesi.
13. Con riferimento alla fig. sottostante dove A è un punto interno all'angolo convesso $B\hat{O}C$, $AD \perp OB$ e $AE \perp OC$, dimostrare che *ADOE* è inscrittibile in una circonferenza e indicare il suo diametro.



14. Sia *ABCD* un quadrilatero inscritto in una circonferenza. Condotte le diagonali *AC* e *BD*, gli angoli $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ sono congruenti?

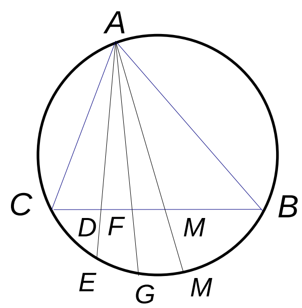
15. Dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo è congruente al diametro della circonferenza inscritta.

16. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo inscritto in una circonferenza di raggio *R* con *AB*>*AC* e $B\hat{A}C = 60°$. Inoltre l'altezza relativa al lato *BC* sia congruente ad *R* e sia *AD* la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$. Si prolunghi *AB* di un segmento $AE \equiv AC$. Dimostrare che:

    a. *EC* è tangente alla circonferenza nel punto *C*.
    b. *EC* // *AD*.

17. In riferimento alla figura sottostante dove *AD* è l'altezza del triangolo *ABC* relativa a *CB*, *AF* è la bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$ e *AM* è la mediana di *BC*, dimostrare che:

    a. *MG* e *AD* sono parallele
    b. *AF* è bisettrice dell'angolo $D\hat{A}M$.



18. Considerata la circonferenza di centro *O* e raggio *R*, condurre le tangenti *AB* e *AC*, dove *A* è un punto tale che *AO*=*2R*. Dimostrare che il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è equilatero. Detto *H* il punto di intersezione di *BC* con *AO*, determinare la misura di *AH* e *OH*. Prolungare *AO*

fino ad incontrare la circonferenza nel punto *D* e congiungere *B* con *D* e *C* con *D*. Di che natura è il quadrilatero *ABCD*?

19. Si considerino due circonferenze tangenti internamente in *A* e sia *AB* un diametro della circonferenza maggiore. Dal punto *B* si conduca una tangente alla circonferenza minore in *C* che incontri la maggiore nel punto *D*. Dimostrare che $B\hat{A}C \equiv C\hat{A}D$.

- **Poligoni regolari**

1. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a. Un triangolo equilatero e un quadrato sono poligoni regolari.
   b. Il rombo è un poligono regolare.
   c. Il rettangolo è equiangolo, ma non è equilatero.
   d. Un poligono regolare è circoscrittibile ad una circonferenza.
2. Dire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a. Un rettangolo non è mai circoscrivibile ad una circonferenza.
   b. Un poligono equilatero ed equiangolo è regolare.
   c. In ogni poligono regolare il lato è minore dell'apotema.
   d. In ogni poligono regolare l'apotema è minore del raggio.
3. Calcolare l'ampiezza degli angoli di un pentagono, di un esagono, di un ottagono regolare.
4. Siano *AD* e *AC* le diagonali di un pentagono regolare *ABCDE*, che intersecano la diagonale *EB* nei punti *R* e S. Determinare le ampiezze degli angoli del triangolo *ARS*.

   Suggerimento
   Ricordare che angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono congruenti.
5. Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un poligono regolare si ottiene un altro poligono regolare.
6. A partire dai vertici di un poligono regolare si prendano sui lati, sempre nello stesso verso, dei segmenti congruenti. Si unisca l'estremo di ciascun segmento con il successivo e si dimostri che si ottiene un altro poligono regolare.
7. Dimostrare che le tre diagonali uscenti da un vertice di un esagono regolare dividono l'esagono in quattro triangoli: due isosceli, congruenti fra loro, gli altri due rettangoli anch'essi congruenti fra

loro. Determinare, inoltre, le ampiezze degli angoli di ciascuno di questi triangoli.

8. Dimostrare che le due diagonali uscenti da un vertice di un pentagono regolare dividono il pentagono in tre triangoli isosceli, dei quali due sono congruenti fra loro. Determinare, inoltre, le ampiezze degli angoli di ciascuno di questi triangoli.

9. Dimostrare che le diagonali di un poligono regolare che escono da uno stesso vertice dividono l'angolo in parti congruenti.

   Suggerimento
   Inscrivere il poligono in una circonferenza e ricordare la proprietà degli angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti.

10. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:

    a. L'ipotenusa di un poligono regolare è il raggio della circonferenza inscritta.
    b. Il lato di un esagono regolare, inscritto ad una circonferenza, è congruente al raggio della circonferenza.
    c. Il lato di un triangolo equilatero, inscritto ad una circonferenza, è congruente al diametro della circonferenza.

11. Dimostrare che l'angolo al centro $A\hat{O}B$ di un esagono regolare (AB è il lato dell'esagono e O il suo centro) è congruente all'angolo formato da due apotemi consecutivi.

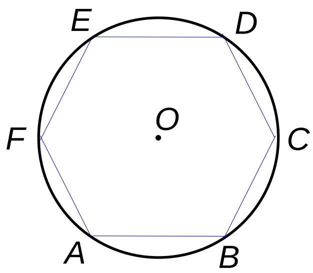
12. Dimostrare che un angolo di un esagono regolare ed il suo angolo al centro sono supplementari.

13. Generalizzare le proprietà enunciate nei due esercizi precedenti.

14. Dimostrare che se un parallelogramma è inscritto in una circonferenza, esso è un rettangolo.

15. Dimostrare che se un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha le diagonali passanti per il centro della circonferenza, esso è un rettangolo.

16. Dimostrare che se una circonferenza è divisa in un numero intero di archi congruenti, congiungendo successivamente i punti di divisione si ottiene un poligono regolare inscritto.



Linea risolutiva

a. Sia *C(O,r)* la circonferenza di centro *O* e raggio r (fig. sopra), divisa in n archi congruenti fra loro, mediante i punti *A, B, C, D, E, F* ...
b. Unito il punto *A* con *B, B* con *C* e così via, il poligono che si ottiene ha i lati congruenti perché ... .
c. Unito il centro con i vertici *A, B, C, D, E, F* ..., si ottengono n triangoli tutti congruenti fra loro perché ... ed isosceli sulle basi *AB, BC, CD, DE, EF, ...*
d. Concludi.

17. Dimostrare che ogni poligono equilatero, inscritto in una circonferenza, è regolare.

18. Dimostrare che ogni trapezio isoscele è inscrittibile in una circonferenza.

19. Dimostrare che se in una circonferenza si considerano tre corde congruenti consecutive e se ne uniscono gli estremi liberi si ottiene un trapezio.

    Suggerimento
    Tracciare le diagonali.

20. Dimostrare che le diagonali di un esagono regolare non passante per il centro sono congruenti.

21. Dimostrare che un qualunque trapezio rettangolo non è inscrittibile in una circonferenza.

22. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
    a. Un quadrilatero, a differenza di un triangolo, non è sempre inscrittibile.
    b. Ogni rettangolo è inscrittibile in una circonferenza.
    c. Ogni trapezio è inscrittibile in una circonferenza
    d. Ogni trapezio isoscele è inscrittibile in una circonferenza.

23. Dimostrare che quattro tangenti ad una circonferenza, parallele a due a due formano un rombo. Dimostrare inoltre che, congiungendo a due a due i punti di contatto, si ottiene un rettangolo.

24. Sia *AB* una corda di una circonferenza. Si traccino le rette perpendicolari alla corda passanti per *A* e *B* che incontrano la circonferenza rispettivamente nei punti *D* e *C*. Dimostrare che *ABCD* è un rettangolo.

25. In un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ si conducano le altezze *CH* e *AK*, relative ai lati *AB* e *BC* e sia *O* il loro punto d'incontro. Dimostrare che il quadrilatero *HOKB* è inscrittibile in una circonferenza.

26. Si consideri un trapezio isoscele e si conducano le bisettrici dei quattro angoli interni. Dimostrare che il quadrilatero ottenuto dalle intersezioni di tali bisettrici è inscrittibile in una circonferenza.

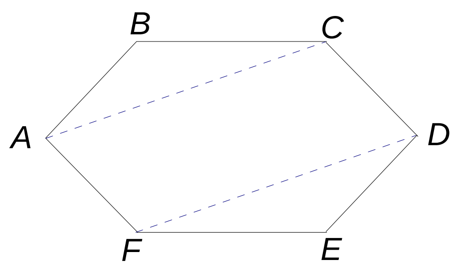
27. Dimostrare che in un qualsiasi esagono inscritto in una circonferenza la somma degli angoli non consecutivi è congruente alla somma degli altri tre.

    Suggerimento
    Considerare i corrispondenti angoli al centro .....

28. Si consideri un trapezio circoscritto ad una circonferenza. Dimostrare che unendo il centro della circonferenza con gli estremi di un lato obliquo si ottiene un triangolo rettangolo.

29. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

    Hp: $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE \equiv EF \equiv FA$
    Ts: $AC \,//\, FD \quad AC \equiv FD$
    $A\hat{C}D \equiv D\hat{F}A \qquad \angle D\hat{F}A = 90^\circ$

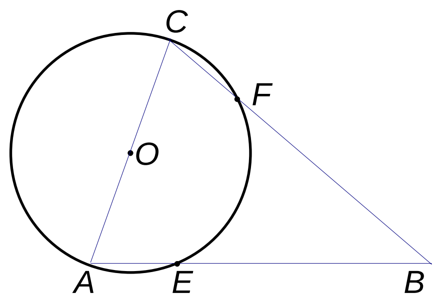


Dimostrare la tesi.

30. Dimostrare che ogni diagonale di un pentagono regolare è parallela ad un lato.

31. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

    Hp: $OA \equiv OC$ *Ts*: $EF // AC$



Dimostrare la tesi.

32. Dimostrare che il lato del quadrato circoscritto ad una circonferenza è congruente al diametro.

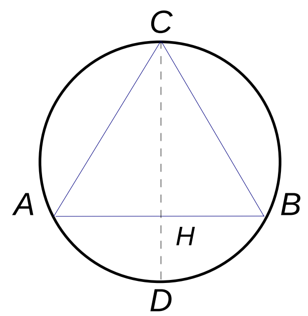
33. Dimostrare che la diagonale del quadrato inscritto in una circonferenza è congruente al diametro.

34. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Dimostrare che la corda passante per i punti medi dei lati *AB* e *AC* è divisa dai lati in tre parti congruenti.

35. Scrivere l'enunciato del teorema rappresentato nella figura sottostante con ipotesi e tesi:

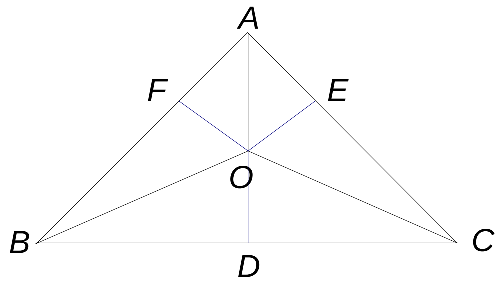
    Hp: $AB \equiv BC \equiv CA$ *Ts*: $CH = \frac{3}{4} CD$

    $CH \perp AB$

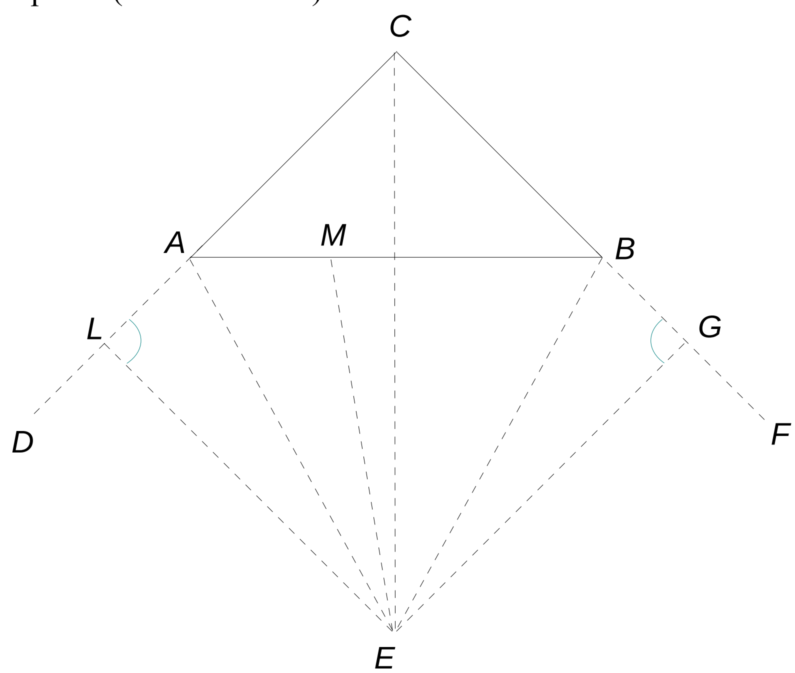


Dimostrare la tesi.

- **Punti notevoli di un triangolo**
  1. Dimostrare che l'incentro di un triangolo ha la stessa distanza dai lati.



  2. Dimostrare che le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo e dell'angolo interno non adiacente ad essi passano per uno stesso punto (detto **excentro**).



Linea risolutiva

a. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo (fig. sopra).

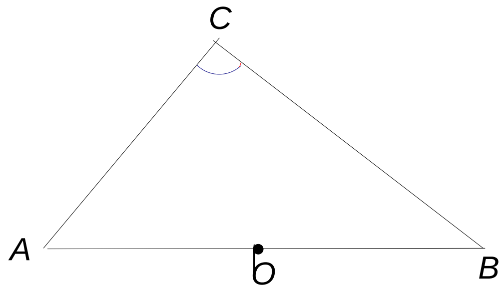
b. Sia E il punto d'intersezione delle bisettrici degli angoli $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}F$.

c. $EL \equiv EM$ perché ... $EM \equiv EF$ perché ...
d. Concludi ...

3. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri:
   a. Gli assi dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto detto circocentro.
   b. Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto, detto incentro.
   c. Le altezze di un triangolo passano per uno stesso punto, detto excentro.
   d. In un triangolo equilatero il circocentro, l'ortocentro, l'incentro coincidono in un unico punto.

4. Nella figura sottostante $A\hat{C}B \equiv 90°$ ed O è il circocentro del triangolo.

   $AO \equiv AB$?



5. Da un punto A esterno ad una circonferenza si traccino le tangenti AB e AC. Dimostrare che l'incentro del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è il punto medio dell'arco $\widehat{BC}$.

6.

   Nel triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base BC siano AH, BK, CT le tre altezze ed O l'ortocentro. Dimostrare che il quadrilatero $AKOT$ è inscrittibile in una circonferenza di cui si determini il diametro ed il centro P. Dimostrare inoltre che gli angoli $O\hat{T}H$ e $A\hat{T}P$ sono congruenti e che la retta per H e T è tangente alla circonferenza di centro P.

   Suggerimento

   Osservare che i triangoli $P\overset{\Delta}{A}T$ e $H\overset{\Delta}{T}C$ sono isosceli.

7. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo qualunque e siano AD, BE e CF le tre altezze. Dimostrare che AD, BE e CF sono le bisettrici del triangolo che ha per vertici i punti D, E, F.

8. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo qualunque e O l'ortocentro. Tracciate le altezze AD, BE e CF, trovare nella figura ottenuta sei quadrilateri inscrittibili e per ogni quadrilatero precisare il diametro della circonferenza circoscritta.

9. Nel triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ il baricentro coincide con il circoncentro. Dimostrare che il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è equilatero.

10. Nel triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ il circoncentro coincide con l'incentro. Dimostrare che il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è equilatero.

11. Dimostrare che gli assi dei segmenti che congiungono l'incentro di un triangolo equilatero con gli estremi di un lato, dividono questo lato in tre parti congruenti.

12. Il punto di incontro delle tre mediane di un triangolo si chiama **baricentro**.

    Dimostrare che il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra.

    Linea risolutiva

    a. Siano AN e BM le mediane dei lati BC e AC del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ e O il loro punto di intersezione. Dimostriamo che $OB \equiv 2OM$ e $OA \equiv 2ON$.
    b. Siano E ed F i punti medi rispettivamente di OA e OB. Si ha: EF parallelo ad AB perchè... $EF \equiv {}^1\!/_2\, AB$ perchè...
    c. Risulta anche MN parallelo ad AB e $MN \equiv {}^1\!/_2\, AB$ perchè...
    d. Segue che il quadrilatero $EFNM$ è un parallelogramma perchè... e in ogni parallelogramma le diagonali si...
    e. Concludi.

13. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo e siano M, N, P i punti medi dei lati. Dimostrare che:

    a. i triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $M\overset{\Delta}{N}P$ hanno lo stesso baricentro.

b. l'ortocentro del triangolo $M\overset{\Delta}{N}P$ coincide con il circoncentro del triangolo.

11.5. Concetto di equivalenza (Vol 1 1° livello pag. 243)

1. L'equivalenza tra figure è una relazione in $\mathcal{F}$? Giustificare la risposta.
2. In $\mathcal{F}$ sia $\mathcal{F}_c$ il sottoinsieme delle figure congruenti tra loro ed $\mathcal{F}_e$ il sottoinsieme delle figure equivalenti. Quale è la relazione di inclusione fra $\mathcal{F}_c$ ed $\mathcal{F}_e$?
3. Enunciare in forma diversa il contenuto dell'esercizio precedente.

Osservando che la relazione di equivalenza tra figure si riconduce in ultima analisi alla relazione di congruenza, sono valide per l'equivalenza le stesse proprietà della congruenza, e cioè:

a) ogni figura è equivalente a se stessa *(proprietà riflessiva)*;

b) se una figura è equivalente ad un'altra, questa è equivalente alla prima *(proprietà simmetrica)*;

c) se una figura è equivalente ad una seconda, e questa è equivalente ad una terza, anche la prima è equivalente alla terza *(proprietà transitiva)*.

4. Sia $\mathcal{E}$ la relazione di equivalenza in $\mathcal{F}$. Esprimere simbolicamente le proprietà a), b) e c).
5. Dimostrare che

$$\left(f, g, h \in \mathcal{F}, f \cong h, g \cong h\right) \Rightarrow \left(f \cong g\right)$$

Teorema 12

Due parallelogrammi aventi congruenti le basi e le altezze relative sono equivalenti.

Dimostrazione

Osserviamo preliminarmente che, considerato nel piano un segmento *AB* congruente alle basi dei due parallelogrammi, possiamo costruire su di esso, dalla stessa parte, due parallelogrammi *ABCD* e *ABEF* congruenti ai dati, e sarà sufficiente dimostrare l'equivalenza di questi. D'altra parte, dovendo essere congruenti le altezze relative alla base comune *AB*, i lati *CD* ed *EF* sono su una stessa retta, parallela ad *AB*. Conviene, perciò, distinguere tre casi, secondo che *CD* ed *EF* abbiano in comune un <u>segmento</u>, un <u>estremo</u> o <u>nessun punto</u>.

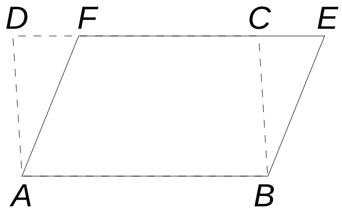


Figura 34 - Parallelogrammi equivalenti.

a. *CD* ed *EF* hanno in comune il segmento *FC* (Figura 34). I triangoli $\overset{\Delta}{ADF}$ e $\overset{\Delta}{BCE}$ hanno $A\hat{D}F \equiv B\hat{C}E$ perché ..., $AD \equiv BC$ perché lati ..., $DF \equiv CE$ perché differenza tra i segmenti congruenti *DC* e *EF* e lo stesso ...; dunque $\overset{\Delta}{ADF}$ e $\overset{\Delta}{BCE}$ sono .... Ma *ABCD* è composto da *AFCB* e $\overset{\Delta}{ADF}$, mentre *AFEB* è composto da *FCBA* e $\overset{\Delta}{BCE}$. Allora i due parallelogrammi, essendo composti da parti rispettivamente congruenti sono ....
b. *CD* ed *EF* hanno in comune un estremo.
   La dimostrazione si ottiene con poche modifiche da quella precedente (Figura 35.a).

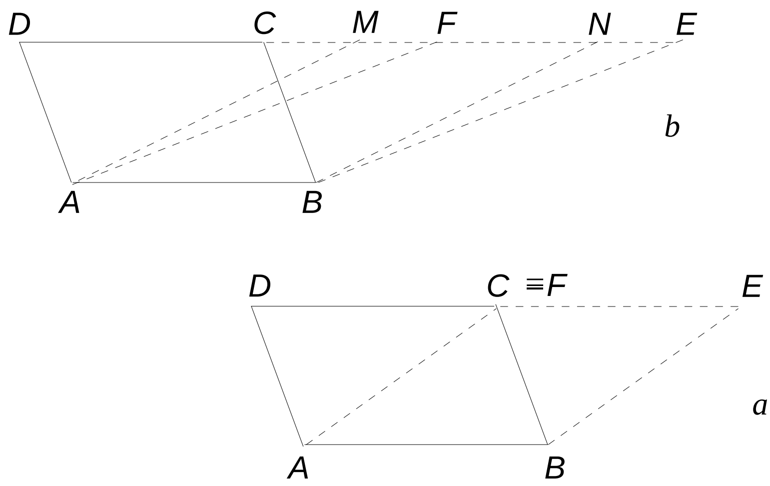


Figura 35 - Parallelogrammi equivalenti.

c. *CD* ed *EF* non hanno punti in comune, e per esempio *EF* sta sul prolungamento di *DC* dalla parte di *C* (Figura 35.b).
Sulla semiretta *CF* consideriamo i segmenti adiacenti *CM*, *MN*, *NE* ... congruenti a *CD*, fino a trovarne uno che abbia un estremo o una parte in comune con *EF*. Sia esso, per esempio, *MN*; dei parallelogrammi *ABCD*, *ABMC*, *ABNM*, *ABEF* ciascuno è equivalente al successivo, per uno dei casi precedenti, perciò anche il primo è ... all'ultimo, cioè $ABCD \cong ABEF$.

6. Dimostrare che ogni parallelogramma è equivalente a un rettangolo che ha due lati consecutivi congruenti rispettivamente a un lato e alla relativa altezza del parallelogramma.

Suggerimento
Applica la definizione di rettangolo e il teorema 12.

Teorema 13

Un triangolo è equivalente a qualunque parallelogramma che abbia la base congruente alla metà della base del triangolo e la stessa altezza.

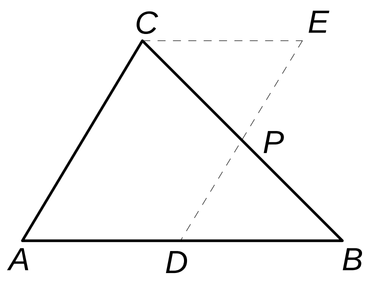


Figura 36 - Triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Dimostrazione

Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo di base *AB* (Figura 36). Per il punto medio *D* di *AB* si conduca la parallela ad *AC* e per *C* la parallela ad *AB*; sia *E* l'intersezione delle due rette e *P* l'intersezione di *CB* con *ED*. Il parallelogramma *ADEC* ha la base *AD* che è ... di *AB* e l'altezza relativa congruente a quella del triangolo. Consideriamo i triangoli $\overset{\Delta}{CEP}$ e $\overset{\Delta}{PDB}$: essi hanno $CE \equiv DB$ perché ..., $E\hat{C}P \equiv P\hat{B}D$ e $C\hat{E}P \equiv P\hat{D}B$ perché ..., quindi sono .... Allora $ADEC \cong ABC$ perché ..., il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è equivalente ad ogni altro parallelogramma che abbia base e altezza rispettivamente congruenti a quelle di *ADEC* .

7. Dimostrare che ogni triangolo è equivalente ad un rettangolo che ha due lati consecutivi congruenti rispettivamente alla metà della base e all'altezza del triangolo.
8. Dimostra che due triangoli aventi congruenti le basi e le altezze relative sono equivalenti.

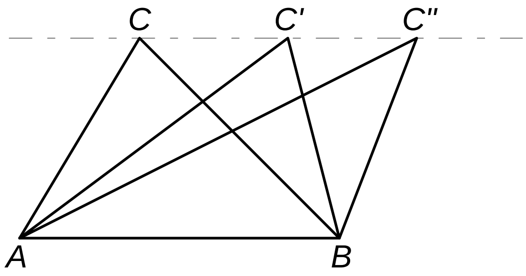


Figura 37 - Triangoli equivalenti.

9. Dimostrare che se si trasporta un vertice di un triangolo in un altro punto della parallela al lato opposto condotta per esso, si ottiene un triangolo equivalente al primo.

Suggerimento

In riferimento alla Figura 37, applicare l'esercizio precedente.

 Teorema 14

Un trapezio è equivalente ad un triangolo che ha base congruente alla somma delle basi del trapezio e altezza congruente a quella del trapezio.

Dimostrazione

Dati il trapezio *ABCD* e il triangolo $\overset{\Delta}{EFH}$ (Figura 38) tali che $FH \equiv AB + DC$ e $ET \equiv CS$, sia *K* il punto di *FH* che lo divide in due parti *FK* e *KH* congruenti ad *AB* e *DC* rispettivamente; si traccino i segmenti *AC* ed *EK*. Si ha $A\overset{\Delta}{B}C \equiv E\overset{\Delta}{F}K$ perché ... e $A\overset{\Delta}{D}C \equiv E\overset{\Delta}{K}H$ perché .... Quindi ....

10. Dimostra che un trapezio è equivalente ad un rettangolo di cui due lati consecutivi sono congruenti rispettivamente alla semisomma delle basi e all'altezza del trapezio.

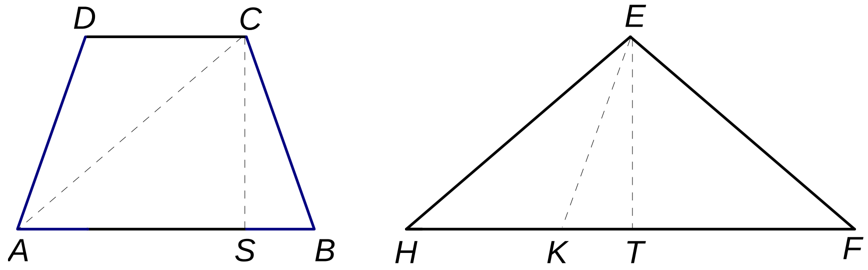


Figura 38 - Trapezio e triangolo equivalenti.


Teorema 15

Ogni poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo che ha base congruente al perimetro del poligono e altezza congruente al raggio della circonferenza.

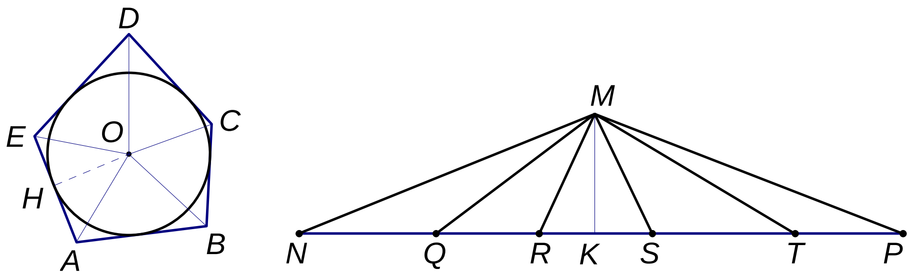


Figura 39 - Poligono circoscritto e triangolo equivalenti.

Dimostrazione

Sia *ABCDE* un poligono circoscritto ad una circonferenza di centro *O* (per semplicità si considera un pentagono) e *MNP* un triangolo la cui base *NP* sia congruente al perimetro del poligono e la cui altezza *MK* sia congruente al raggio *OH*. Considera su *NP* i punti *Q*, *R*, *S*, *T* che lo dividono in parti rispettivamente congruenti ai lati *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* e traccia i segmenti che uniscono *M* con questi punti e quelli che uniscono *O* con i vertici del poligono.

Risulta $M\overset{\Delta}{N}Q \equiv A\overset{\Delta}{O}B$ perché ..., $Q\overset{\Delta}{R}M \equiv O\overset{\Delta}{B}C$ perché ..., $R\overset{\Delta}{M}S \equiv O\overset{\Delta}{D}C$ perché ..., $S\overset{\Delta}{M}T \equiv D\overset{\Delta}{O}E$ perché ..., $M\overset{\Delta}{T}P \equiv O\overset{\Delta}{E}A$ perché .... In conclusione ....

11. Dimostra che un poligono regolare è equivalente ad un rettangolo di cui due lati consecutivi sono rispettivamente congruenti al semiperimetro e all'apotema.
12. Dato un poligono convesso, costruire un rettangolo ad esso equivalente.

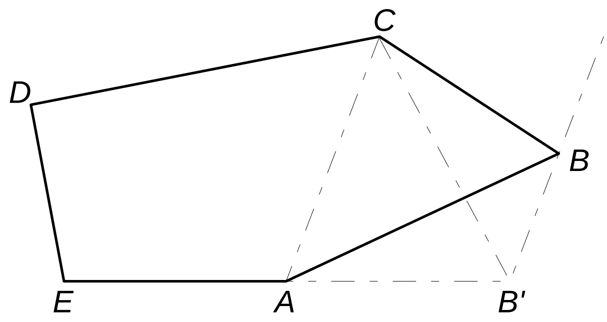


Figura 40 - Costruzione di un rettangolo equivalente a un pentagono.

Suggerimento

Dato un poligono, l'idea è di costruirne uno ad esso equivalente, ma con un lato in meno; così proseguendo, si giunge ad un triangolo equivalente al poligono dato, ma un triangolo si può trasformare in un rettangolo equivalente. Ad esempio, dato il pentagono *ABCDE* (fig. 8), considera due lati consecutivi *AB* e *BC* e traccia la diagonale *AC*; per *B* conduci poi la parallela ad *AC* e sia B' il punto di incontro col prolungamento di *EA*. Allora $A\overset{\Delta}{B}C \cong A\overset{\Delta}{B'}C$ perché ... (cfr. esercizio 9) e quindi il pentagono *ABCDE* è equivalente al quadrilatero $EB'CD$ perché .... Dunque, dato il pentagono *ABCDE*, abbiamo costruito il quadrilatero $EB'CD$ ad esso... .

13. Dimostrare che in un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati e del doppio del rettangolo di uno di questi e della proiezione dell'altro su di esso.

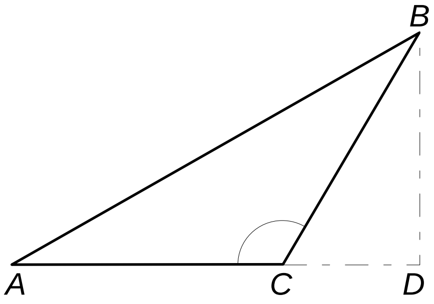


Figura 41 - Triangolo ottusangolo.

Suggerimento

In riferimento alla Figura 41, *CD* è la proiezione del lato *CB* sulla retta *AC*, $\overset{\Delta}{CDB}$ è rettangolo in *D*:

$$AB^2 \cong AD^2 + BD^2 \cong \ldots \cong AC^2 + CB^2 + 2\,AC \cdot CD.$$

14. Dimostrare che in un triangolo il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio del rettangolo di uno di questi e della proiezione dell'altro su di esso.

Suggerimento

Nel triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, il lato *AB* sia opposto all'angolo acuto $\hat{\mathbf{C}}$ e sia *CD* la proiezione di *CB* sulla retta *AC*. Abbiamo due casi:

a. *D* è interno al segmento *AC* (Figura 42.*a*); allora

$$AB^2 \cong AD^2 + BD^2 \cong (AC - CD)^2 + BD^2 \cong \ldots$$

$$\ldots \cong AC^2 + CB^2 - 2\,AB \cdot CD;$$

b. *D* è sul prolungamento di *CA* (Figura 42.*b*); in tal caso basta sostituire *AD* con $CD - AC$ anziché con $AC - CD$.

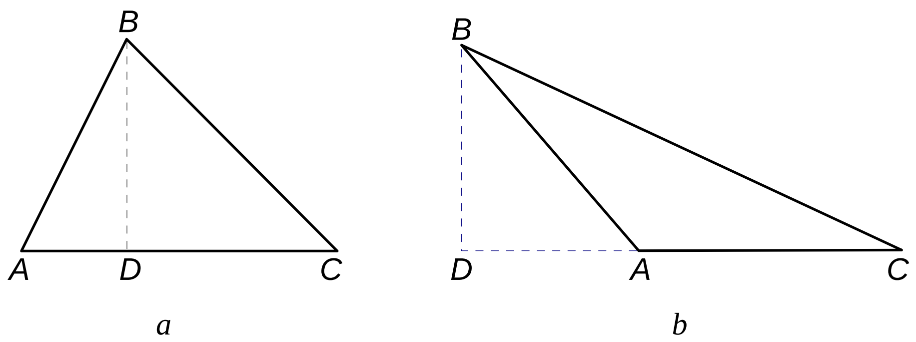


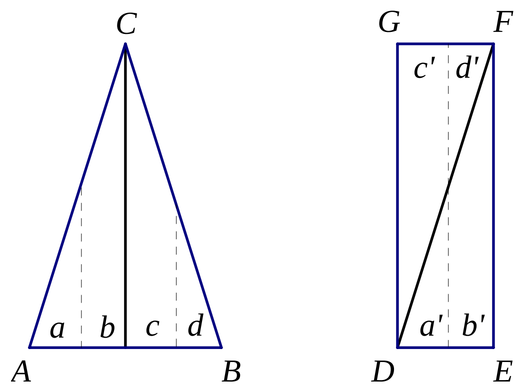
Figura 42.

15. Tenendo conto degli ultimi due esercizi, completa la seguente proposizione: «Se in un triangolo il quadrato di un lato equivale alla somma dei quadrati degli altri due, il triangolo è ...».

11.6. Esercizi supplementari

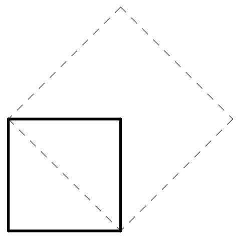
- **Prime proprietà**

1. Con riferimento alla figura sottostante dove $a \equiv a'$, $b \equiv b'$, $c \equiv c'$, $d \equiv d'$, risulta $A\overset{\Delta}{B}C \cong DEFG$?



2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   a. Due figure congruenti sono equivalenti.
   b. Due figure equivalenti sono congruenti.
   c. Ogni figura è equivalente a se stessa.
   d. Due figure equivalenti ad una terza non sempre sono equivalenti tra loro.

3. Osservare la figura sottostante e dire quale relazione vi è fra il quadrato dato e quello costruito sulla sua diagonale.

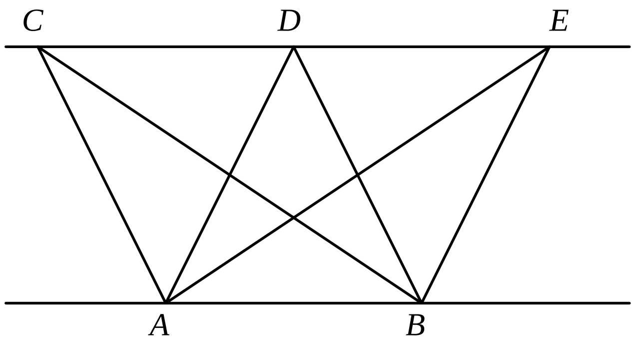


4. Disegnare un quadrato e costruirne uno che sia equivalente alla metà del primo e uno che sia il doppio di esso.

   Suggerimento
   Tener conto dell'esercizio precedente.

5. Disegnare due triangoli, uno scaleno ed uno isoscele , aventi le basi congruenti ed equivalenti fra loro.

6. I tre triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ e $\overset{\Delta}{ABE}$ sono equivalenti fra di loro? Perché?



o **Casi di notevole equivalenza**

1. Dimostrare che se due parallelogrammi sono equivalenti ed hanno altezze congruenti, hanno pure congruenti le rispettive basi.

2. Dimostrare che se due triangoli sono equivalenti ed hanno basi congruenti, hanno pure congruenti le rispettive altezze.

3. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo qualunque. Si congiunga il punto medio *M* del lato *AB* e il punto medio *N* del lato *AC* con un punto qualunque *D* del lato *BC*. Dimostrare che il quadrilatero *AMDN* è equivalente alla metà del triangolo *ABC*.

Suggerimento

Congiungere *A* con *D*.

4. Dimostrare che due triangoli aventi due lati rispettivamente congruenti e gli angoli compresi supplementari sono equivalenti.

   Suggerimento

   Disegnare i due triangoli in modo che i due angoli supplementari siano adiacenti.

5. Dimostrare che una mediana di un triangolo divide questo in due parti equivalenti.

6. Se la base di un triangolo viene divisa in *n* parti congruenti e si congiungono i punti di divisione con il vertice opposto, dimostrare che il triangolo viene scomposto in *n* parti equivalenti.

7. Disegnare un parallelogramma e trasformarlo in un rettangolo equivalente di ugual base.

8. Dato un triangolo, costruire un triangolo isoscele avente la stessa base ed equivalente a quello dato.

   Suggerimento

   Condurre l'asse della base.

9. Dimostrare che un parallelogramma viene scomposto dalle sue diagonali in quattro triangoli equivalenti.

   Suggerimento

   Una mediana di un triangolo divide questo in due parti equivalenti.

10. Si conduca la mediana *AM* del triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ e si congiunga un punto qualunque *T* di *AM* con *B* e con *C*. Dimostrare che il triangolo viene così diviso in quattro parti, equivalenti a due a due.

11. Dimostrare che un triangolo viene diviso dalle sue mediane in sei triangoli equivalenti.

12. Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo scaleno si ottengono dei triangoli equivalenti.

13. Dato un triangolo qualunque, condurre per i suoi vertici le parallele ai lati opposti. Dimostrare che il triangolo ottenuto è equivalente al quadruplo di quello dato.

14. Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un parallelogramma si ottiene un parallelogramma equivalente alla metà del primo.

    Suggerimento
    Condurre le diagonali del parallelogramma minore.

15. Sia *ABCD* un parallelogramma. Si unisca un punto qualunque *E* della diagonale *AC* con i vertici *B* e *D* e si dimostri che sono equivalenti i seguenti triangoli:
    a. $\overset{\Delta}{AEB}$ e $\overset{\Delta}{AED}$;
    b. $\overset{\Delta}{CEB}$ e $\overset{\Delta}{CED}$.

16. Sia *ABCD* un parallelogramma. Da un punto qualsiasi *E* di una diagonale si traccino le parallele ai lati. Si dimostri che dei quattro parallelogrammi ottenuti quelli non attraversati dalla diagonale considerata sono equivalenti.

    Suggerimento

    Tenere presente che un parallelogramma è diviso da una sua diagonale in due triangoli congruenti, quindi equivalenti.

17. Sia *ABCD* un parallelogramma. Congiungendo un punto qualunque *E* del lato *AB* con gli estremi del lato opposto *CD* si ottengono tre triangoli. Dimostrare che il triangolo $\overset{\Delta}{DEC}$ è equivalente alla somma degli altri due.

    Suggerimento
    Condurre dal punto *E* la parallela al lato *BC*.

18. Dimostrare che un parallelogramma è equivalente alla metà di un triangolo avente base e altezza rispettivamente doppie della base e dell'altezza del parallelogramma.

19. Per i vertici di un quadrangolo si conducano le parallele alle diagonali. Dimostrare che il parallelogramma ottenuto è equivalente al doppio del quadrangolo dato.

    Suggerimento
    Si traccino le diagonali del quadrilatero.

20. Siano *ABCD* e *ABC'D'* due parallelogrammi che giacciono da parti opposte rispetto al lato comune *AB*. Dimostrare che il parallelogramma *DCC'D'* è equivalente alla somma dei due parallelogrammi dati.

21. Sia M il punto medio del lato obliquo BC del trapezio $ABCD$. Dimostrare che il triangolo $D\overset{\Delta}{M}A$ è equivalente alla metà del trapezio.

Suggerimento

Si prolunghi DM dalla parte di M fino ad incontrare il prolungamento del lato AB nel punto E e si dimostri che i triangoli BME e DMC sono congruenti, quindi sono anche ....

22. Dimostrare che congiungendo i punti medi delle basi di un trapezio, questo resta diviso in due trapezi equivalenti.

Suggerimento

Congiungere il punto medio di una delle basi con gli estremi dell'altra base.

23. Dato un trapezio e tracciate le sue diagonali, dimostrare che dei quattro triangoli ottenuti i due che hanno come basi i lati obliqui sono equivalenti.

Suggerimento

Essi si possono ottenere togliendo dai due triangoli equivalenti ....

24. Dimostrare che i triangoli aventi per base i lati non paralleli di un trapezio e ciascuno per vertice opposti i punti medi dell'altro lato sono equivalenti.

25. Dimostrare che conducendo per i punti medi dei lati obliqui di un trapezio le perpendicolari alle basi si ottiene un rettangolo equivalente al trapezio.

26. Trasformare un trapezio in un rettangolo ad esso equivalente.

Suggerimento

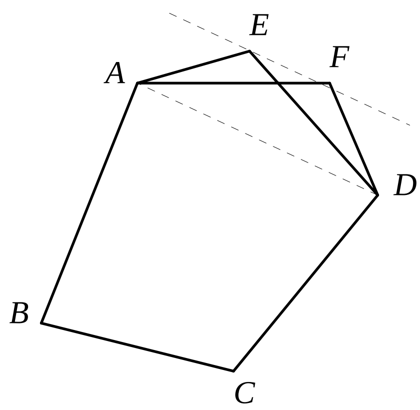
Si trasformi prima il trapezio in un parallelogramma e poi questo in un rettangolo.

27. Trasformare un triangolo in un rettangolo equivalente.

28. Con riferimento alla figura sottostante, dove $EF // AD$ dimostrare che $ABCDE \cong ABCDF$.

Suggerimento

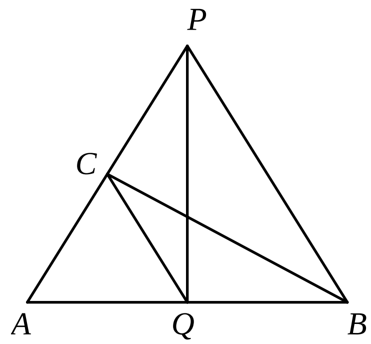
Dimostrare che $A\overset{\Delta}{D}E \cong A\overset{\Delta}{D}F$.



29. Con riferimento alla figura sottostante, dove $CQ//PB$ dimostrare che $A\overset{\Delta}{B}C \cong A\overset{\Delta}{Q}P$.

Suggerimento

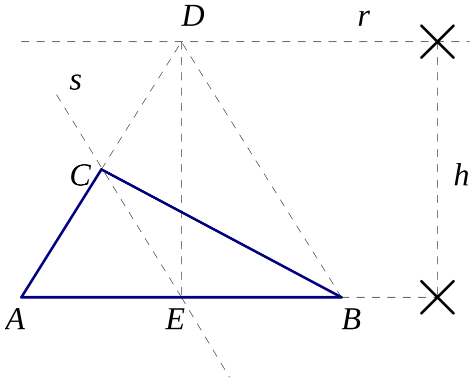
Dimostrare che $C\overset{\Delta}{Q}P \cong C\overset{\Delta}{Q}B$.



30. Costruire un triangolo di altezza h equivalente ad un triangolo dato.

Linea risolutiva

a. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ il triangolo dato (figura sottostante).
b. Ad una distanza h da uno dei lati del triangolo (per esempio dal lato AB) si conduca la parallela r al lato.
c. Sia $D = r \cap AC$ e sia s la parallela a DB condotta per C ed $E = s \cap AB$.
d. Il triangolo $\overset{\Delta}{ADE}$ è quello richiesto; infatti ....



31. Costruire un triangolo di data base *b* equivalente ad un triangolo dato.

Suggerimento

Linea risolutiva dell'esercizio precedente.

32. Trasformare un triangolo in un rettangolo equivalente che abbia come base un segmento assegnato.

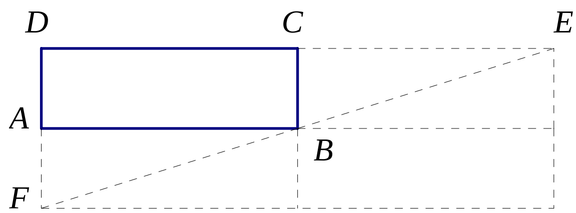
Suggerimento

Trasformare prima il triangolo dato in un altro equivalente che abbia come base il segmento assegnato (v. esercizio precedente).

33. Trasformare un triangolo in un altro equivalente con un lato assegnato.

Linea risolutiva

a. Sia *ABCD* il rettangolo dato (figura sottostante).
b. Si prolunghi *DC* di un segmento *CE* congruente al segmento assegnato.
c. Detto *F* il punto di intersezione delle rette *EB* e *DA*, si costruisca il rettangolo ....



34. Disegnare un triangolo e costruirne un altro che sia la terza parte del primo.

Suggerimento

Si divida la base del triangolo considerato in tre parti congruenti e si congiungano i punti di divisione con il vertice opposto. Si ottengono tre triangoli che sono fra loro ..., perché .... Quindi ....

35. Dimostrare che due poligoni di uguale perimetro, circoscritti ad una stessa circonferenza, sono equivalenti.
36. Dimostrare che un poligono regolare è equivalente ad un triangolo avente base ed altezza rispettivamente congruenti al perimetro e all'apotema del poligono.
37. Dimostrare che il quadrato circoscritto ad una circonferenza è quadruplo del quadrato costruito sul raggio.
38. Dimostrare che il quadrato inscritto in una circonferenza è doppio del quadrato costruito sul raggio.
39. Dimostrare che $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Suggerimento
Disporre i quadrati in modo che abbiano un angolo in comune.

- **Trasformazioni di poligoni in rettangoli equivalenti**

1. Trasformare un parallelogramma in un rettangolo equivalente avente in comune col primo un lato.
2. Trasformare un esagono regolare in un rettangolo equivalente.
3. Trasformare un pentagono in un triangolo equivalente.

Suggerimento
Trasformare prima il pentagono in un quadrilatero equivalente e poi questo in un triangolo equivalente.

4. Trasformare un esagono regolare in un triangolo equivalente.
5. Trasformare un pentagono circoscritto ad una circonferenza in un rettangolo equivalente.
6. Costruire un rettangolo equivalente alla somma di più rettangoli dati.

Suggerimento

Trasformare prima i rettangoli dati in modo che abbiano stessa base e stessa altezza.

7. Trasformare un quadrato in un rettangolo equivalente avente per base un segmento dato.
8. Costruire un quadrato equivalente alla somma di due rettangoli dati.
9. Trasformare un rettangolo in un rombo equivalente avente in comune una diagonale.

   Suggerimento
   Un rettangolo è diviso da una sua diagonale in due ... ciascuno dei quali può essere trasformato in ....

- **Teorema di Pitagora**

1. Dato il rettangolo *ABCD*, esprimere la diagonale *BD* in funzione dei lati *AB* e *BC*, applicando il teorema di Pitagora.
2. Sia *ABCD* un trapezio isoscele con base maggiore *AB*. Esprimere l'altezza in funzione del lato obliquo e della sua proiezione sulla base maggiore.
3. Sia *ABCD* un rombo. Esprimere il lato *AB* in funzione delle diagonali.
4. (Teorema inverso del teorema di Pitagora) Dimostrare che se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati allora il triangolo è rettangolo.

   Suggerimento
   Si costruisca un triangolo rettangolo i cui cateti sono congruenti ai lati minori del triangolo dato e si dimostri, applicando il teorema ..., che i due triangoli sono congruenti.
5. Dimostrare che in ogni triangolo equilatero il quadrato avente come lato l'altezza è equivalente ai 3/4 del quadrato costruito sul lato.
6. Dimostrare che in ogni triangolo rettangolo la differenza dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente alla differenza dei quadrati aventi come lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Suggerimento

Tracciare l'altezza relativa all'ipotenusa e applicare il teorema ... ai due triangoli rettangoli ottenuti.

7. Dato un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ rettangolo in A e costruiti i quadrati aventi come lati rispettivamente i cateti AB e AC, dimostrare che la somma delle distanze dei vertici di questi due quadrati, opposti al vertice comune A, dalla retta dell'ipotenusa è congruente all'ipotenusa stessa.

   Suggerimento

   Tracciare l'altezza relativa all'ipotenusa ....

8. Dimostrare che il quadrato avente come lato l'altezza di un triangolo equilatero è equivalente al triplo del quadrato costruito sulla metà del lato.

9. La somma dei quadrati costruiti sulle diagonali di un rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui quattro lati?

10. Dimostrare che la somma dei quadrati costruiti sui lati di un parallelogramma è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle due diagonali.

11. Dimostrare che se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, la somma dei quadrati costruiti su due lati opposti è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due.

12. Dato un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, rettangolo in A, si unisca un punto D del cateto AC con B. Dimostrare che la somma dei quadrati aventi come lati rispettivamente BD e AC è equivalente alla somma dei quadrati aventi come lati rispettivamente BC e AD.

    Suggerimento

    Si applichi il teorema di Pitagora ai triangoli $\overset{\Delta}{ABD}$ e $\overset{\Delta}{ABC}$.

13. Dato un rettangolo $ABCD$ e un punto P interno ad esso, dimostrare che $PB^2 + PD^2 \cong PA^2 + PC^2$.

    Suggerimento

    Dal punto P condurre le parallele ai lati e considerare i triangoli rettangoli ....

14. Dimostrare che il quadrato costruito sulla diagonale di un quadrato è doppio del quadrato stesso.

15. Siano l e d le lunghezze rispettivamente del lato AB e della diagonale AC di un quadrato $ABCD$. Dimostrare che $d = l\sqrt{2}$.

16. Siano l e h le lunghezze rispettivamente del lato BC e dell'altezza AH di un triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$. Dimostrare che $h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$.

17. Dimostrare che la misura del lato del quadrato $ABCD$ inscritto nel cerchio di centro O e raggio r è uguale a $r\sqrt{2}$.

    Suggerimento

    Il triangolo $\overset{\Delta}{AOB}$ è congruente alla metà del quadrato di lato $AO = r$.

18. Sia $ABCD$ un quadrato. Si prolunghi la diagonale AC di un segmento $CE \equiv AB$; dal punto E si tracci la perpendicolare alla retta del lato CD e sia F il punto di intersezione. Si dimostri che il triangolo $\overset{\Delta}{CEF}$ è equivalente al quadrato dato.

19. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo isoscele e sia P un punto qualunque della base AB. Si congiunga P con C e si dimostri che $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB}$.

20. Dimostrare che se un quadrangolo ha le diagonali perpendicolari, la somma dei quadrati costruiti su due lati opposti è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due.

21. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo rettangolo e sia M il punto medio del cateto AC. Da M si tracci la perpendicolare all'ipotenusa che incontra questa nel punto D. Dimostrare che la differenza dei quadrati costruiti sopra i due segmenti in cui resta divisa l'ipotenusa è equivalente al quadrato costruito sul cateto AB.

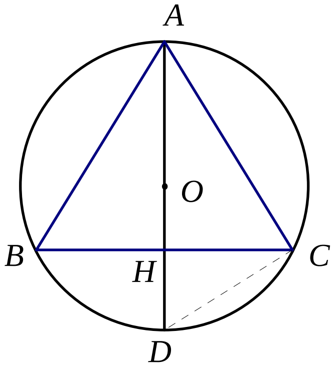
    Suggerimento

    Si unisca M con B e si applichi il teorema di Pitagora.

22. Dimostrare che il quadrato costruito sul lato del triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$, inscritto nella circonferenza di centro O e raggio r, è equivalente al triplo del quadrato avente come lato un segmento congruente al raggio r.

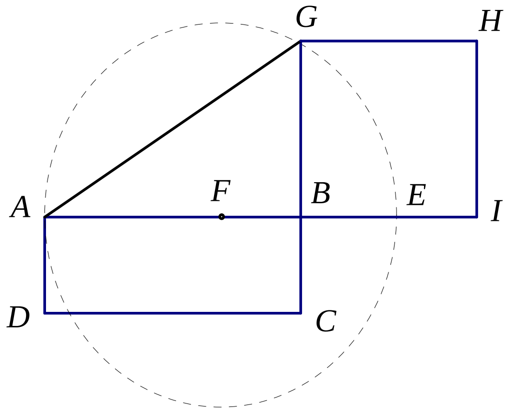
    Linea risolutiva

a. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ il triangolo equilatero inscritto nella circonferenza $C(O,r)$ (figura sottostante).
b. L'altezza AH di $\overset{\Delta}{ABC}$ passa per il centro perché ....
c. $DC = \frac{1}{2} BC$ perché ....
d. $DC = r$ perché ....
e. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{ACD}$ ....



23. Costruire un quadrato equivalente ad un rettangolo dato.

Linea risolutiva
a. Sia $ABCD$ il rettangolo dato (figura sottostante).
b. Si prolunghi AB di un segmento $BE \equiv BC$ e sia F il punto medio di AE.
c. Si consideri la circonferenza di centro F e raggio FA.
d. Sia G il punto comune alla circonferenza e al prolungamento di BC.
e. Il quadrato costruito su BG è equivalente al rettangolo dato. Infatti ....



- **Teorema di Euclide**

1. Dividere un segmento *AB* in due parti tali che il rettangolo i cui lati sono congruenti alle due parti sia equivalente ad un quadrato dato.

   Suggerimento
   Costruita la semicirconferenza che ha per diametro *AB*, tracciare una parallela al diametro, la cui distanza da questo sia congruente al lato del quadrato. Applicare il secondo teorema di Euclide.

2. Costruire un quadrato equivalente alla metà di un quadrato assegnato.

   Suggerimento
   Dividere un quadrato in due rettangoli congruenti. Applicare il secondo teorema di Euclide.

3. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo rettangolo. Esprimere la proiezione di un cateto sull'ipotenusa in funzione dell'altezza relativa all'ipotenusa e della proiezione dell'altro cateto, applicando il secondo teorema di Euclide.

4. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo rettangolo, retto in $\widehat{C}$ e sia $\overline{CH}$ l'altezza relativa all'ipotenusa. Dimostrare che $\overline{AB}:\overline{AH} = \overline{CH}:\overline{AC}$.

5. Dimostrare che il rettangolo avente per lati i cateti di un triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo avente per lati l'ipotenusa e l'altezza ad essa relativa.

6. Dimostrare che in ogni trapezio la somma dei quadrati costruiti sopra le diagonali è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra i lati non paralleli aumentata del doppio rettangolo che ha come lati le basi.

7. (Inverso del primo teorema di Euclide). Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con l'angolo $A\widehat{B}C$ acuto, si costruisca il quadrato sul lato *AB* e il rettangolo avente per lati il segmento *BC* e la proiezione *BH* di *BA* su *BC*, in modo che il quadrato e il rettangolo siano equivalenti. Dimostrare che il triangolo è rettangolo in *A*.

   Suggerimento
   Nel semipiano di origine *BC* che contiene il triangolo, si disegni la semicirconferenza di diametro *BC* e sia *A'* il punto di

intersezione di essa con la retta *AH*. Dimostrare che *A'* coincide con *A* procedendo per assurdo e applicando al triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{BA'C}$ il primo teorema di Euclide relativamente al cateto *BA'*.

8. (Inverso del secondo teorema di Euclide). Dimostrare che se in un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ il quadrato costruito sull'altezza *AH* relativa al lato *BC* è equivalente al rettangolo costruito sulle proiezioni su *BC* dei lati *BA* e *AC*, esso è rettangolo in *A*.

Suggerimento

Si segua il procedimento suggerito per l'esercizio precedente.