APPROFONDIMENTI

SUI NUMERI

1. Il sistema di numerazione decimale

Ben presto, all'operazione naturale del contare, si è aggiunta l'esigenza di «rappresentare» i numeri. I sistemi di numerazione possibili sono molti; per ora ci limitiamo a ricordare i concetti fondamentali del sistema di numerazione decimale, in uso nel mondo occidentale ormai da circa 800 anni (nell'Appendice 2, invece, accenneremo al sistema binario).

In un sistema di numerazione, due sono gli elementi essenziali: la **base** e la **convenzione di posizione**. La base indica il numero di simboli che si utilizzano per la rappresentazione dei numeri. Nel sistema decimale, o *a base dieci*, i simboli sono i seguenti:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Cioè le cifre significative 1, 2, …, 9 più lo zero.

Le cifre 0, 1, 2, …, 9 si dicono unità intere *semplici* o *del primo ordine*, mentre si conviene che dieci unità semplici formano una *decina* o *unità del secondo ordine*, dieci decine un *centinaio* o *unità del terzo ordine*, e così via.

Ogni numero, poi, viene rappresentato con un allineamento di cifre secondo la «convenzione di posizione»:

Qualunque cifra posta a sinistra di un'altra rappresenta unità dell'ordine immediatamente superiore a quello rappresentato dalla cifra alla propria destra. I numeri naturali così rappresentati si dicono anche interi naturali o semplicemente interi se non c'è possibilità di equivoci.

Esempio 1

La scrittura

$$3725$$

rappresenta il numero

3 migliaia, 7 centinaia, 2 decine, 5 unità

Cioè tremilasettecentoventicinque

E' facile osservare quanto sia scomodo scrivere i numeri in lettere: nell'esempio precedente occorrono ben 28 battute, contro le quattro del sistema decimale! Il sistema decimale, quindi, è anche un modo per «condensare le idee»!

Esercizio 1

Perché è necessaria la cifra 0 nel sistema di numerazione decimale?

1.1 I numeri decimali

Dividendo una data quantità intera (un segmento, una torta, ..) in dieci, cento, mille parti uguali, ciascuna di esse è rispettivamente un decimo, un centesimo, un millesimo, della quantità data.

Un decimo, un centesimo, un millesimo si dicono *unità decimali* rispettivamente del *primo, secondo, terzo ordine* e si indicano, nel sistema decimale, con le scritture:

0,1; 0,01; 0,001

Fra le varie unità decimali esiste una relazione dello stesso tipo di quella che intercede fra le unità intere dei diversi ordini: cioè dieci decimi formano una unità intera, dieci centesimi formano un decimo, e così via. Come per le unità intere, dunque, anche per quelle decimali vale che:

Dieci unità decimali di un ordine qualunque formano un'unità decimale dell'ordine che precede quello considerato.

Un numero composto da unità intere e da unità decimali, o soltanto da queste ultime, si dice **numero decimale**. Con la convenzione precedente, il numero formato da tre decine, cinque unità, sette decimi, quattro centesimi, cinque millesimi si scrive:

35,745.

2. **Frazioni generatrici** (Cif. 1° livello p. 40)

Abbiamo detto che un numero periodico è un numero razionale assoluto, ossia una frazione $\frac{a}{b}$ (con $b \neq 0$) non equivalente ad una frazione decimale. La domanda che a questo punto ci poniamo è: dato un numero periodico in forma decimale, come si può determinare la frazione da cui esso deriva (frazione generatrice)?

Per risalire da un numero periodico alla frazione generatrice da cui proviene, senza dilungarci sull'argomento e senza ripetere la regola già nota, indichiamo, attraverso degli esempi, un procedimento che porta alla soluzione.

Sia dato il numero periodico

$$a = 0{,}151515\ldots \tag{1}$$

moltiplichiamo ambo i membri per 100 (perché due sono le cifre del periodo)

$$100 \times a = 15{,}151515\ldots \tag{2}$$

Ora sottraiamo dalla (2) la (1) membro a membro:

$$100 \times a - a = 15{,}151515\ldots - 0{,}1515\ldots$$

$$99 \times a = 15{,}00000\ldots$$

Ricordando il concetto di divisione, l'ultima uguaglianza dice che

$$a = 15 : 99 = \frac{15}{99}.$$

Esercizio 2

Calcolare la frazione generatrice dei numeri $18{,}\overline{815}$, $0{,}\overline{9}$, $2{,}\overline{9}$.

Questo procedimento può essere anche applicato se il numero periodico possiede un antiperiodo, cioè un gruppo di cifre, prima del periodo. Infatti sia

$$a = 0{,}2\overline{314}$$

moltiplichiamo per 1000 (perché proprio per 1000?)

$$1000 \times a = 231{,}431431431\ldots$$

Sottraiamo, membro a membro, dall'ultima uguaglianza la penultima:

$$999 \times a = 231{,}2000$$

da cui

$$a = \frac{231{,}2}{999} = \frac{2312}{9990}$$

(nell'ultima uguaglianza si è moltiplicato numeratore e denominatore per 10)

Esercizio 3

Sapresti enunciare la regola che fornisce la frazione generatrice di un numero periodico semplice?

Esercizio 4

Calcola la frazione generatrice di $1{,}5\overline{13}$.

Esercizio 5

Enuncia la regola che fornisce la frazione generatrice di un numero periodico misto.

3. I numeri irrazionali (Cif. 1° livello p. 52-53)

Abbiamo, dunque, constatato che neanche con gli strumenti informatici di calcolo riusciamo a determinare tutte le cifre decimali di $\sqrt{2}$. Possiamo dimostrare con un ragionamento detto «per assurdo» che $\sqrt{2}$ non contiene un numero finito o infinito periodico di cifre decimali, cioè non è un numero razionale. Infatti supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè esiste una frazione $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini, tale che

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

allora elevando al quadrato entrambi i membri di questa uguaglianza si ha

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

da cui moltiplicando per b^2 otteniamo

$$2 \times b^2 = a^2$$

Ricordiamo ora che i fattori primi che compaiono in a compaiono raddoppiati in $a^2 = a \times a$ e che ogni numero naturale diverso da 1, ammette una ed una sola fattorizzazione in numeri primi, pur di non tener conto dell'ordine dei fattori. Ne consegue che l'uguaglianza

$$2 \times b^2 = a^2$$

non può essere vera, perché il fattore *2* compare un numero dispari di volte nel termine a sinistra dell'uguaglianza, e un numero pari di volte nel termine a destra.

Allora non possiamo supporre che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, cioè non ha una forma decimale finita o periodica, ma ha una forma decimale infinita non periodica.

Con i procedimenti di calcolo consueti possiamo calcolare approssimazioni a meno di $\frac{1}{10}$ (una cifra decimale), $\frac{1}{100}$ (due cifre decimali) e così via. Anzi possiamo stabilire se sono per eccesso, cioè più grandi, o per difetto, cioè più piccoli. Infatti, se un numero x è tale che $x^2 < 2$, ricordando la definizione di $\sqrt{2}$ possiamo ritenere a buon ragione che $x < \sqrt{2}$; analogamente, se $x^2 > 2$ riteniamo che $x > \sqrt{2}$.

Da questo punto di vista abbiamo:

$a_1 = 1$
$a_2 = 1,4$
$a_3 = 1,41$
$a_4 = 1,414$

sono approssimazioni di $\sqrt{2}$ per difetto, essendo:

$1^2 = 1<2$
$(1,4)^2 = 1,96<2$
$(1,41)^2 = 1,9881<2$
$(1,414)^2 = 1,999396<2$

Se vogliamo ottenere approssimazioni per eccesso di $\sqrt{2}$ basta aggiungere una unità all'ultima cifra delle precedenti approssimazioni:

$b_1 = 2$
$b_2 = 1,5$
$b_3 = 1,42$
$b_4 = 1,415$

sono approssimazioni di $\sqrt{2}$ per difetto, essendo:

$2^2 = 4<2$
$(1,5)^2 = 2,25<2$
$(1,42)^2 = 2,0164<2$
$(1,415)^2 = 2,002225<2$

quindi risulta:

$a_1 = 1$	$\Rightarrow$	$<\sqrt{2}<2 = b_1$	$b_1 - a_1 = 1$
$a_2 = 1,4$	$\Rightarrow$	$<\sqrt{2}<1,5 = b_2$	$b_2 - a_2 = 0,1$
$a_3 = 1,41$	$\Rightarrow$	$<\sqrt{2}<1,42 = b_3$	$b_3 - a_3 = 0,01$
$a_4 = 1,414$	$\Rightarrow$	$<\sqrt{2}<1,415 = b_4$	$b_4 - a_4 = 0,001$

Naturalmente possiamo continuare le due successioni approssimanti calcolando:

$$a_5, a_6, a_7, .. \qquad b_5, b_6, b_7, \dots$$

Ricapitolando, possiamo dire che:

1. $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, cioè non è esprimibile come frazione; la sua forma decimale è illimitata e non periodica;
2. possiamo calcolare approssimazioni di $\sqrt{2}$ sia per difetto che per eccesso, in particolare possiamo costruire due successioni che indichiamo con $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ (l'indice n assume i valori 1,2,3,… cioè $n \in \mathbb{N}$ e quindi a_n o b_n indica un termine qualsiasi della successione) tali che:
   i) $a_n < \sqrt{2} < b_n$ qualunque sia n;
   ii) $b_n - a_n = \underbrace{0{,}00...001}_{n-1}$, ossia diminuisce al crescere di n e si può rendere piccola quanto si vuole.

Con un linguaggio più espressivo, la proprietà i) può essere tradotta dicendo che le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ *racchiudono* il numero $\sqrt{2}$; inoltre notiamo esplicitamente che non esiste alcun numero razionale c tale che $a_n < c < b_n$ qualunque sia n, cioè non esiste alcun numero razionale racchiuso dalle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ (se esistesse sarebbe $\sqrt{2}$ che non è razionale!).

Esempio 2

Calcolare la lunghezza di una circonferenza di raggio 1.

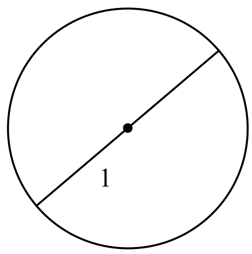

Figura 1

Soluzione

Ricordando che la formula che esprime la lunghezza della circonferenza in funzione del raggio è

$$C = 2\,\pi\, r,$$

ma π, come avrai imparato nella scuola media, è un numero decimale illimitato non periodico:

$$\pi = 3{,}1415926\ldots$$

Nella pratica usiamo approssimazioni per eccesso o per difetto. A tal proposito

$$\begin{array}{llllll} a_1=3 & a_2=3{,}1 & a_3=3{,}14 & a_4=3{,}141 & a_5=3{,}1415 & \ldots \\ b_1=4 & b_2=3{,}2 & b_3=3{,}15 & b_4=3{,}142 & b_5=3{,}1416 & \ldots \end{array}$$

sono due successioni approssimanti π per difetto ($\{a_n\}$) e per eccesso ($\{b_n\}$) e risulta

$a_n < \pi < b_n$ qualunque sia n

$b_n - a_n = \underbrace{0{,}00\ldots001}_{n-1}$, ossia diminuisce al crescere di n.

Inoltre non esiste alcun numero razionale q tale che $a_n < q < b_n$ qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, cioè che sia racchiuso dalle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

E' importante, quindi, studiare questi numeri e cominciamo con la

Definizione 1

I numeri che hanno rappresentazione decimale illimitata e non periodica si chiamano numeri **irrazionali**.

Le qualifiche di “razionale” e “irrazionale” non sono state scelte a caso: il termine “razionale”, infatti, deriva dal latino *ratio* che significa, tra l’altro, “rapporto” o “frazione”; “irrazionale”, invece, sta per “non razionale”, cioè non esprimibile sotto forma di frazione. Ed è proprio così. Infatti, sappiamo che i numeri razionali si possono esprimere sotto forma di frazione, ossia come quoziente generalizzato di due interi; un numero irrazionale, al contrario, certamente non si può esprimere sotto forma di frazione. È sufficiente ricordare, a tale proposito, che l’algoritmo della divisione tra due interi termina dopo un numero finito di passi (numero di cifre decimali finito), oppure fornisce, da un certo punto in poi, sempre lo stesso resto (quindi le cifre del quoziente si ripetono).

Nel caso degli esempi considerati, abbiamo costruito due successioni di numeri razionali ($\{a_n\}$ e $\{b_n\}$) che approssimavamo per difetto e per eccesso rispettivamente $\sqrt{2}$ e π e tali successioni godevano delle seguenti proprietà:

(1) $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$;
(2) $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_n > b_{n+1} < \ldots$;
(3) $a_n < b_n$ qualunque sia n;
(4) $b_n - a_n$ diminuisce al crescere di n e si può rendere piccola quanto si vuole;
(5) $a_n < \sqrt{2}\ (\pi) < b_n$ qualunque sia n

In generale possiamo affermare che un numero irrazionale è caratterizzato da:

- rappresentazione decimale illimitata non periodica*;*
- due successioni di numeri razionali*,* dette *approssimanti* per difetto $\{a_n\}$ e per eccesso $\{b_n\}$ che soddisfano le (1) ÷ (5).

Osserviamo, però, che anche per i numeri razionali si possono costruire successioni approssimanti per eccesso e per difetto che soddisfano le (1)÷(5).

Infatti:

Esempio 3

- Il numero razionale 1 è approssimato dalle due successioni

$$a_1=0{,}9 \quad a_2=0{,}99 \quad a_3=0{,}999 \quad a_4=0{,}9999 \quad \ldots$$
$$b_1=1{,}1 \quad b_2=1{,}01 \quad b_3=1{,}001 \quad b_4=1{,}0001 \quad \ldots$$

che soddisfano le (1)÷(4) ed inoltre (proprietà (5)):

$$a_n < 1 < b_n \text{ qualunque sia } n$$

cioè 1 è racchiuso da $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$;

- Il numero $\frac{1}{9}$ è approssimato da

$$a_1=0{,}1 \quad a_2=0{,}11 \quad a_3=0{,}111 \quad a_4=0{,}1111 \quad \ldots$$
$$b_1=0{,}2 \quad b_2=0{,}12 \quad b_3=0{,}112 \quad b_4=0{,}1112 \quad \ldots$$

che soddisfano le (1)÷(4) ed inoltre (proprietà (5)):

$$a_n < \frac{1}{9} < b_n \text{ qualunque sia } n$$

cioè $\frac{1}{9}$ è racchiuso da $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

Sottolineiamo, ancora una volta, che nel caso delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ approssimanti $\sqrt{2}$ e π, così come per ogni numero irrazionale, non esiste alcun numero razionale x tale che

$$a_n < x < b_n \text{ qualunque sia } n$$

4. La moltiplicazione nell’insieme dei numeri relativi (Cif. 1° livello p. 66)

Le motivazioni delle regole che definiscono la moltiplicazione nei numeri relativi sono da ricercarsi nelle seguenti condizioni:

I) nel caso di due numeri positivi, la moltiplicazione deve essere quella già definita in $\mathbb{Q}_a$

II) anche nell’insieme dei numeri relativi, l’operazione di moltiplicazione deve conservare le stesse proprietà che aveva nei numeri assoluti e cioè associativa, commutativa, distributiva rispetto alla somma, esistenza dell’elemento neutro ed infine la validità della proprietà

$$a \times 0 = 0 \times a = 0 \quad \text{qualunque sia } a \in \mathbb{Z}$$

Dalla prima condizione ricaviamo subito la seguente regola:

Il prodotto (la moltiplicazione) di due numeri positivi è un numero positivo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti.

Esempio 4

- $(+3) \times \left(+\frac{1}{8}\right) = +\frac{3}{8}$;
- $(+0{,}5) \times (+0{,}8) = +0{,}4$.

Stabilito il prodotto di due numeri positivi, vediamo cosa deve essere il prodotto per un numero negativo, ad esempio 3×(-6).

Ricordiamo che risulta, ad esempio

$$6 + (-6) = 0.$$

Se moltiplichiamo ambo i membri dell’uguaglianza precedente per 3, abbiamo

$$3 \times (6+(-6)) = 3 \times 0.$$

Applicando al primo membro la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, (che deve valere in base alla II) ed al secondo membro la proposizione secondo cui $a \times 0 = 0$, otteniamo

$$3 \times 6 + 3 \times (-6) = 0.$$

Ma perché uguaglianza continui ad essere valida, si richiede, in base alla proprietà dell'addizione di cui abbiamo parlato, che $3\times(-6)$ sia l'opposto di 3×6, e cioè

$$3 \times (-6) = -(3\times6) = -18.$$

Possiamo, perciò, fissare la seguente regola:

Il prodotto di un numero positivo per un numero negativo è un numero negativo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti.

Esempio 5

- $2 \times (-3) = -6$, $\quad -1\times 1 = -1$, $\quad -\frac{1}{2}\times\frac{1}{5} = -\frac{1}{10}$.

Resta da definire il prodotto di due numeri negativi, ad esempio $(-2)\times(-5)$
.
Procediamo come prima:

$$(-5) + 5 = 0.$$

Moltiplicando ambo i membri per -2 si ha

$$(-2) \times ((-5) + 5) = (-2) \times 0$$
$$(-2) \times (-5) + (-2) \times (+5) = 0$$

da cui $(-2) \times (-5)$ deve essere l'opposto di $(-2) \times (+5)$, cioè l'opposto di -10.
Quindi

$$(-2) \times (-5) = +10 \ .$$

Possiamo allora stabilire la seguente ulteriore regola:

Il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo che ha come modulo il prodotto dei valori assoluti.

Esempio 6

- $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\right)=+\frac{1}{10},\quad (-0{,}8)\times(-1)=+0{,}8,\quad (-3)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=+\left(\frac{3}{4}\right).$

Per quanto riguarda l'**elemento neutro** nella moltiplicazione osserviamo, che il numero relativo +1 soddisfa pienamente i nostri scopi, in quanto ogni altro numero, *a*, moltiplicato per +1 resta inalterato:

$$a \times (+1) = a \quad \text{qualunque sia } a \ .$$

E' possibile dimostrare che non esistono altri numeri relativi diversi da +1, che possono fungere da elemento neutro per la moltiplicazione.

5. L'elevamento a potenza nell'insieme dei numeri relativi

Così come abbiamo fatto per l'operazione di addizione e di moltiplicazione, anche l'elevamento a potenza nell'insieme dei numeri relativi si definisce in modo che siano rispettate alcune condizioni:

I) nel caso di esponente positivo l'operazione deve essere quella già definita per l'insieme $\mathbb{Q}_a$;

II) anche nell'insieme dei numeri relativi l'elevamento a potenza deve soddisfare tutte le proprietà enunciate a pag. 42 del volume 1° (1° livello), anzi nella seconda si può sopprimere l'ipotesi $m \geq n$.

Allora, tenendo conto della condizione I) abbiamo subito

$$\text{a}\, a \in \mathbb{Q} \to a^n = \begin{cases} \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ volte} & n > 1 \\ a & n = 1 \\ 1 & n = 0,\ a \neq 0 \end{cases} \\ 0^0 \quad non\ ha\ significato \end{cases}$$

con *a* numero razionale relativo arbitrario ed *n* intero maggiore o uguale a zero.

Esempio 7

- $\left(-2\right)^{+3} = \left(-2\right)\times\left(-2\right)\times\left(-2\right) = -8;$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{+2} = \left(+\frac{1}{5}\right)\times\left(+\frac{1}{5}\right) = +\frac{1}{25};$
- $\left(-4\right)^{+2} = \left(-4\right)\times\left(-4\right) = +16.$

Nel caso di esponente positivo, di solito si preferisce abolire il segno «+».

Volendo ora definire la potenza con esponente negativo, chiaramente non possiamo attribuire il significato precedente. Infatti, non avrebbe senso dire che $\left(5\right)^{-4}$ è la quantità che si ottiene moltiplicando 5 per se stesso "*-4*" volte, così come non ha senso dire che il portiere della Nazionale di calcio ha subito "-4" gol.

Proviamo allora a dare un significato, per esempio, alla scrittura 10^{-2} in modo che la condizione II) sia soddisfatta.

Moltiplichiamo la quantità (per il momento incognita) 10^{-2} per 10^3 ed applichiamo la proprietà sul prodotto di potenza con la stessa base:

$$10^3 \times 10^{-2} = 10^1 = 10\,;$$

ma dal momento che 10^3 è uguale a mille, allora deve essere (ricordando la divisione)

$$10^{-2} = \frac{10}{1000} = 0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 .$$

Ripetendo questo artificio con altri numeri siamo portati a porre la seguente definizione:

Dato un numero razionale *a* diverso da zero, e un intero *n* maggiore di zero, si definisce potenza di base *a* ed esponente negativo –*n*, la potenza avente per base il reciproco di *a* e per esponente l'opposto di –*n*, cioè

$$a^{-n} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Evidentemente risulta:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Esempio 8

- $(+5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = (3)^3 = 27$;
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-8} = (-2)^8 = 356$; $\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Si dovrebbe ora verificare che l'elevamento a potenza testè definito soddisfa tutte le proprietà enunciate, ma per ragioni di brevità lasciamo questo compito allo studente volenteroso.

Osserviamo, infine, che così come le potenze a base 10 con esponente positivo sono particolarmente utili per scrivere numeri «molto grandi», le potenze a base 10, ma con esponente negativo, sono utili per scrivere numeri «molto piccoli».

Esempio 9

- $0{,}1 = 10^{-1}$
  $0{,}01 = 10^{-2}$
  $0{,}001 = 10^{-3}$
  $0{,}0001 = 10^{-4}$
  $0{,}00001 = 10^{-5}$
  $0{,}000001 = 10^{-6}$
  :
  $0{,}000000001 = 10^{-9}$
  :

Osservazione

Notiamo che, operando con numeri relativi, la simbologia in un'espressione algebrica può risultare pesante; è allora il caso di cercare una semplificazione senza per altro generare equivoci. Consideriamo, ad esempio, l'espressione

1) $$(+5)+(-3)\times(+6)-(-5):(+2).$$

Osserviamo subito che la prima parentesi può essere eliminata senza possibilità di equivoco, per cui la (1) diventa

2) $$+5+(-3)\times(+6)-(-5):(+2).$$

Inoltre, come già osservato, i numeri positivi si possono «identificare» con i numeri assoluti e quindi possiamo scrivere

3) $$+5+(-3)\times 6-(-5):2.$$

Eseguendo la moltiplicazione e la divisione abbiamo

4) $$+5+(-18)-\left(-\frac{5}{2}\right).$$

Tenendo conto, poi, che una sottrazione può essere trasformata in una addizione e viceversa, possiamo ancora scrivere

5) $$5-18+\frac{5}{2}.$$

In definitiva

$$(+5)+(-3)\times(+6)-(-5):(+2)=5-3\times6+5:2=5-18+\frac{5}{2}=-\frac{21}{2}.$$

Questo esempio ci suggerisce la seguente regola pratica:

In una somma algebrica una parentesi preceduta dal segno «+», può essere eliminata insieme al segno «+» che la precede; se invece essa è preceduta dal «–», può essere eliminata insieme a questo, purché al numero scritto in parentesi si sostituisca il suo opposto.

Ribadiamo da ultimo, che l'ordine di priorità delle operazioni e dell'uso delle parentesi nelle espressioni algebriche è analogo a quello delle espressioni aritmetiche.

Le espressioni algebriche numeriche possono essere semplificate anche con il software Matcos, infatti esistono i comandi

<identificatore>= leggiespr.;(

e

<identificatore>= calcolaespr. (<identificatore>);

rispettivamente per introdurre e semplificare un'espressione algebrica. Per maggiori dettagli si rinvia alla Guida dello Studente.

6. L'insieme dei numeri reali

I numeri irrazionali che finora abbiamo considerato sono in realtà numeri assoluti; ma, così come i razionali assoluti, possono essere facilmente dotati di segno + o -, distinguendosi in positivi e negativi. Otteniamo, così, l'insieme I dei numeri irrazionali (con segno).

Riunendo in un unico insieme i numeri razionali ed irrazionali otteniamo l'insieme dei numeri **reali**, che indicheremo con $\mathbb{R}$.

In altre parole, l'insieme dei numeri irrazionali e razionali, costituisce l'insieme dei numeri reali e si indica con $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$$

Ricordando le operazioni definite in $\mathbb{Q}$ ed in I, possiamo dire che nell'insieme dei numeri reali sono definite le operazioni fondamentali di addizione e moltiplicazione (quindi differenza e quoziente) per le quali valgono le seguenti proprietà formali:

Addizione	*Moltiplicazione*
PROPRIETA' ASSOCIATIVA	
$[(a+b)+c]=[a+(b+c)]$	$[(a\times b)\times c]=[a\times(b\times c)]$
qualunque siano $a, b, c \in R$	
PROPRIETA' COMMUTATIVA	
$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
qualunque siano $a, b \in \mathbb{R}$	
PROPRIETA' DISTRIBUTIVA	
$a \times (b \times c) = a \times b + a \times c$	
qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$	
ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO	
qualunque sia $a \in \mathbb{R}$	
esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $a+0=0+a=a$	esiste $1 \in \mathbb{R}$ tale che $a\times 1=1\times a=a$
ESISTENZA DELL'INVERSO	
OPPOSTO	**RECIPROCO**
qualunque sia $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico elemento $-a \in \mathbb{R}$ tale che a+(-a)=0	qualunque sia $b \neq 0$ esiste un unico elemento $\frac{1}{b} \in \mathbb{R}$ tale che $b \times \frac{1}{b} = 1$

L'addizione, poi, unita all'operazione di opposto definisce la **sottrazione**, così come la moltiplicazione unita all'operazione di reciproco definisce la **divisione**. Inoltre, in $\mathbb{R}$ si possono definire l'uguaglianza e la disuguaglianza, per cui valgono le seguenti proprietà formali:

Uguaglianza	PROPRIETA'	Disuguaglianza
$a = a$	RIFLESSIVA	non esiste
$\{a = b \Rightarrow b = a\}^{(*)}$	SIMMETRICA	non esiste
$\{(a = b, b = c) \Rightarrow a = c\}$	TRANSITIVA	$\begin{cases} (a > b, b > c) \Rightarrow a > c \\ (a < b, b < c) \Rightarrow a < c \end{cases}$
$\{a = b \Rightarrow a + c = b + c\}$	ADDIZIONE	$\begin{cases} a > b \Rightarrow a + c > b + c \\ a < b \Rightarrow a + c < b + c \end{cases}$
$\{a = b \Rightarrow a \times c = b \times c\}$	MOLTIPLICAZIONE	$\begin{cases} a > b \Rightarrow a \times c > b \times c \\ a < b \Rightarrow a \times c < b \times c \end{cases} \quad (c > 0)$ $\begin{cases} a > b \Rightarrow a \times c < b \times c \\ a < b \Rightarrow a \times c > b \times c \end{cases} \quad (\mathrm{c} < 0)$

Dalle definizioni e proprietà di uguaglianza e disuguaglianza discende che, dati due numeri reali *x* e *y*, può verificarsi una sola delle condizioni:

$$x < y, \quad x = y\,, \quad x > y\,.$$

Infine, si possono definire le operazioni di **elevamento a potenza** e, limitatamente ai numeri positivi, **estrazione di radice**:

$$a^n = \begin{cases} 1 & n = 0,\ a \neq 0 \\ a & n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n volte}} & n > 1 \end{cases}$$

0^0 non ha significato

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0,\ n > 0$$

$$\sqrt[k]{a} = b \Leftrightarrow b^k = a \quad a \geq 0,\ b > 0 \quad \text{se } k \text{ è pari.}$$

(*) Il simbolo "$\Rightarrow$" significa (e si legge) "implica".

Per le potenze valogono le proprietà:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Prodotto di potenze di ugual base

$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (\mathrm{a} \neq 0)$ Quoziente di potenze di ugual base

$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ Potenza di una potenza

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ Distributività della potenza rispetto al prodotto

$(a : b)^n = a^n : b^n \quad (b \neq 0)$ Distributività della potenza rispetto al quoziente

Ci si potrebbe chiedere quale sia l'opportunità di riunire in un unico insieme i numeri razionali e irrazionali. La risposta può essere di vario tipo e, specialmente, con motivazioni che, allo stato, non potrebbero risultare del tutto giustificate.

Ci limitiamo perciò semplicemente a dire che nell'insieme dei numeri reali tutte le operazioni di cui sopra sono possibili, nel senso che il risultato è ancora un numero reale. Ciò, naturalmente, non vale negli altri insiemi numerici: basta ricordare la sottrazione in $\mathbb{N}$, la divisione in $\mathbb{Z}$, l'estrazione di radice in $\mathbb{Q}$.

Inoltre in $\mathbb{R}$ vale la proprietà di completezza, che andiamo ad illustrare. Nei numeri razionali abbiamo visto che possono esistere due successioni, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, che verificano le proprietà (1)÷(4) ma che non racchiudono (proprietà (5)) alcun numero razionale. Basta infatti considerare le successioni di razionali approssimanti $\sqrt{2}$ e π le quali, come abbiamo osservato, verificano le (1)÷(4) ma non racchiudono, cioè non esiste alcun numero razionale *c* tale che $a_n < c < b_n$, qualunque sia *n*.

Nell'insieme dei numeri reali ciò non avviene, ossia due successioni di numeri reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, che soddisfano le proprietà (1)÷(4), racchiudono (proprietà (5)) sempre un numero reale, ovvero, esiste sempre uno ed un solo numero reale *c* tale che $a_n < c < b_n$, qualunque sia *n*.

La seguente figura schematizza le relazioni fra gli insiemi numerici finora introdotti:

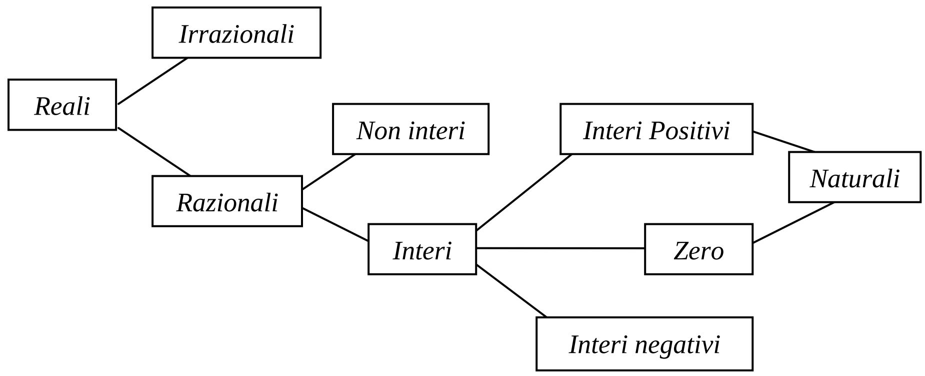

Figura 2